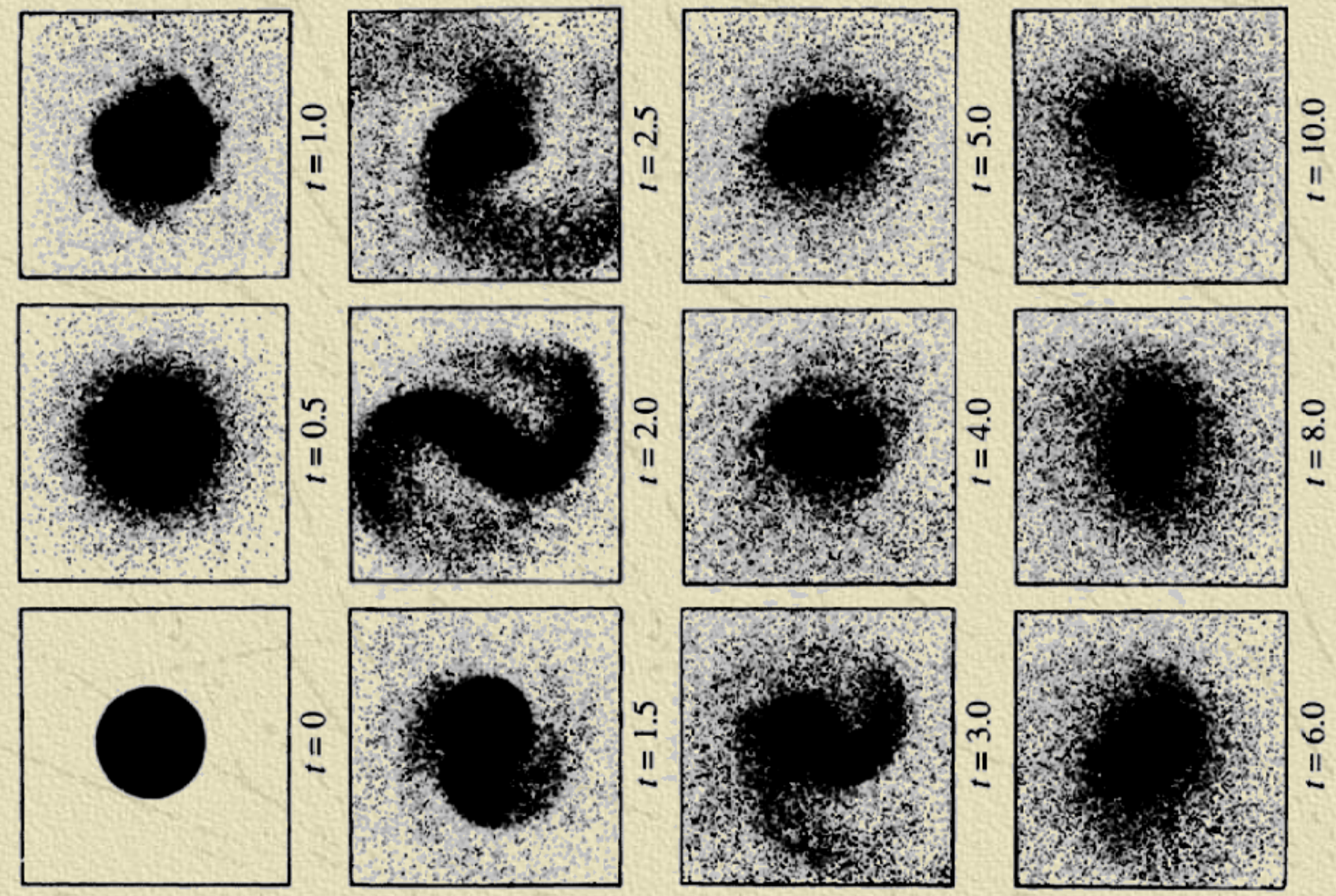
Astronomia Extragaláctica
Semestre: 2017.2

Sergio Scarano Jr
10/03/2019

Estabilidade ou Instabilidade dos Braços Espirais



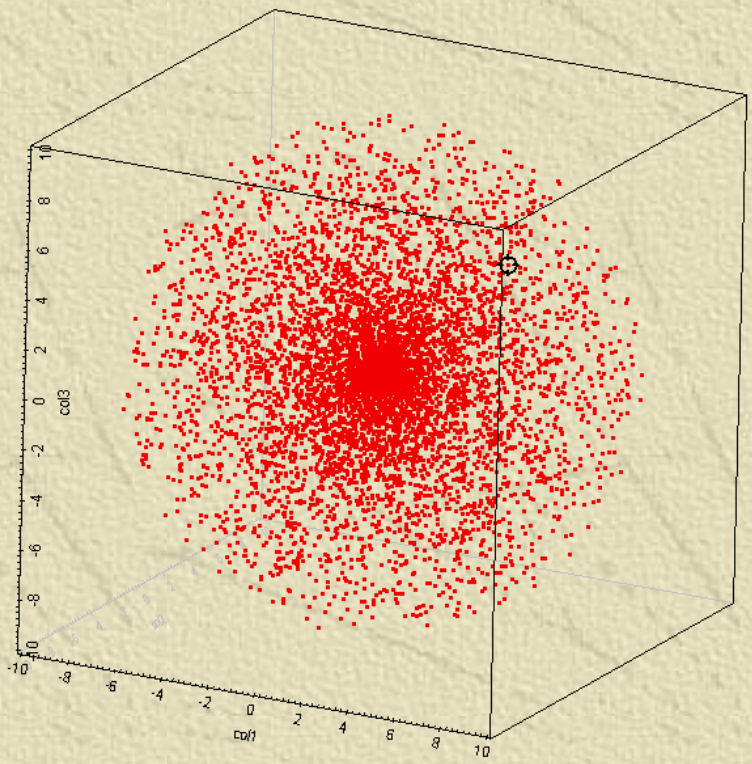
Hohl, *Ap. J.*, *168*, 343, 1971.)

O Teorema do Virial

Vamos modelar um sistema estelar por N massas puntuais m_i (i = 1,..., N) interagindo gravitacionalmente.

- *Em um instante t a massa m_i tem um vetor posição r_i*
- *Distância entre as massas i e j: $r_{ij} = r_i - r_j$*
- *Equação de movimento da partícula i:*

$$m_i \ddot{r}_i = -\sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j \overrightarrow{r_{ij}}}{r_{ij}^3}$$



O Teorema do Virial

Multiplicamos escalarmente os dois lados da equação de movimento por r_i e somar sobre todas as partículas:

$$\sum_i m_i \vec{r_i} \circ \ddot{\vec{r}}_i = -\sum_i \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j \vec{r_i} \circ \vec{r_{ij}}}{r_{ij}^3}$$

o termo do lado esquerdo pode ser escrito em termos da regra da cadeia:

$$\sum_i m_i \vec{r_i} \circ \ddot{\vec{r}}_i = -\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r_i} \circ \dot{\vec{r}}_i - \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$

sendo que o termo dentro da derivada pode ser escrito:

$$\sum_i m_i \vec{r_i} \circ \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r_i}^{\,2}$$

e podemos definir a energia cinética do sistema:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$

e o momento de inércia:

$$I = \sum_i m_i \vec{r_i}^{\,2}$$

O Teorema do Virial

assim, o termo do lado esquerdo fica:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i \circ \ddot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} - 2E_{cin}$$

Reconhecemos no termo da direita a energia potencial:

$$E_{pot} = -\sum_i \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j \vec{r}_i \circ \vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3}$$

pois, considerando que para qualquer par de partículas esta expressão terá termos envolvendo a somatória dos termos r_i, em que i pode assumir qualquer valor (inclusive o valor j) multiplicando a distância r_{ij}, e a recíproca desse termo, considerando que j não pode assumir o valor de i. Ou seja:

$$\vec{r}_i \circ \vec{r}_{ij} + \vec{r}_j \circ \vec{r}_{ji} = \vec{r}_i \circ \vec{r}_{ij} - \vec{r}_j \circ \vec{r}_{ij} = \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) \circ \vec{r}_{ij} = r_{ij}^2$$

logo, U é a energia potencial do sistema

$$E_{pot} = -\sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}}$$

O Teorema do Virial

Dessa forma pode-se escrever de forma resumida que:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} = 2E_{cin} + E_{pot}$$

sistema em equilíbrio: I = constante. Logo,

$$2E_{cin} + E_{pot} = 0$$

energia total do sistema:

$$E_{tot} = E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2}E_{pot}$$

note que, para um sistema estar ligado, E < 0

Assim, em um sistema gravitacional em equilíbrio satisfaz o teorema do virial: a energia cinética é metade do módulo da energia potencial

Teorema do Virial em Sistemas Esféricos

Consideremos um sistema estelar esférico de massa M e raio R. Nele a energia cinética:

$$E_{cin} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle$$

$\langle v^2 \rangle$ é a dispersão de velocidades do sistema (supondo $\langle v \rangle = 0$)

Sendo M(r) a massa dentro do raio r, a energia potencial é:

$$E_{pot} = -\int_o^R \frac{GM(r)dM(r)}{r} = -\frac{\alpha G M^2}{R} \qquad \begin{cases} dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr \\ M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \bar{\rho} \end{cases}$$

α é um número da ordem da unidade que depende da distribuição de massa. Exemplo: α = 3/5 para uma esfera uniforme.

Teorema do virial: $2E_{cin}+E_{pot}=0$; logo

$$\langle v^2 \rangle = -\frac{\alpha G M}{R}$$

Virialização e a Estrutura de Galáxias Elípticas

Um sistema virializado é entendido como um sistema em que as velocidades sustentam a atração gravitacional. Assim, a velocidade quadrática média é proporcional à "temperatura de um gás de estrelas".

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$$

Se a distribuição de velocidades é isotrópica:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \sigma^2$$

Então:

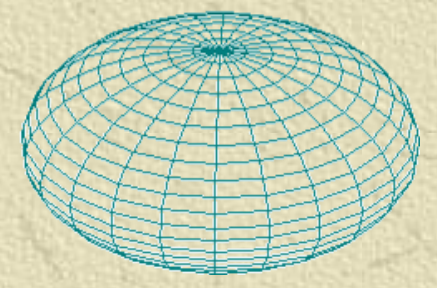
$$\langle v^2 \rangle = 3\sigma^2$$

σ: dispersão de velocidades unidimensional-
"temperatura" do gás de estrelas

Consequentemente, a forma do sistema estelar depende de sua dispersão de velocidades:

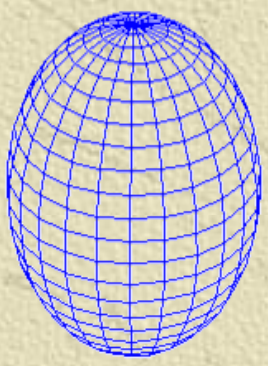
- ***Sistemas oblatos:***

$$\sigma_x = \sigma_y > \sigma_z$$



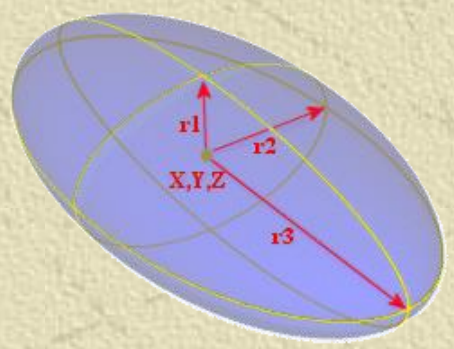
- ***Sistema prolatos:***

$$\sigma_x = \sigma_y < \sigma_z$$



- ***Sistemas triaxiais:***

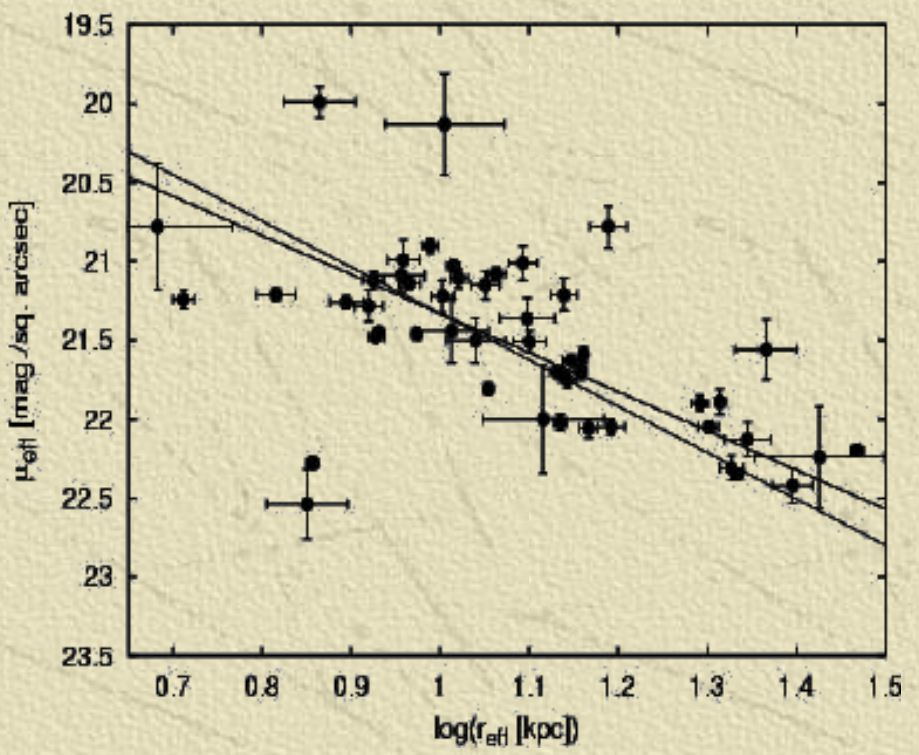
$$\sigma_x \neq \sigma_y \neq \sigma_z$$

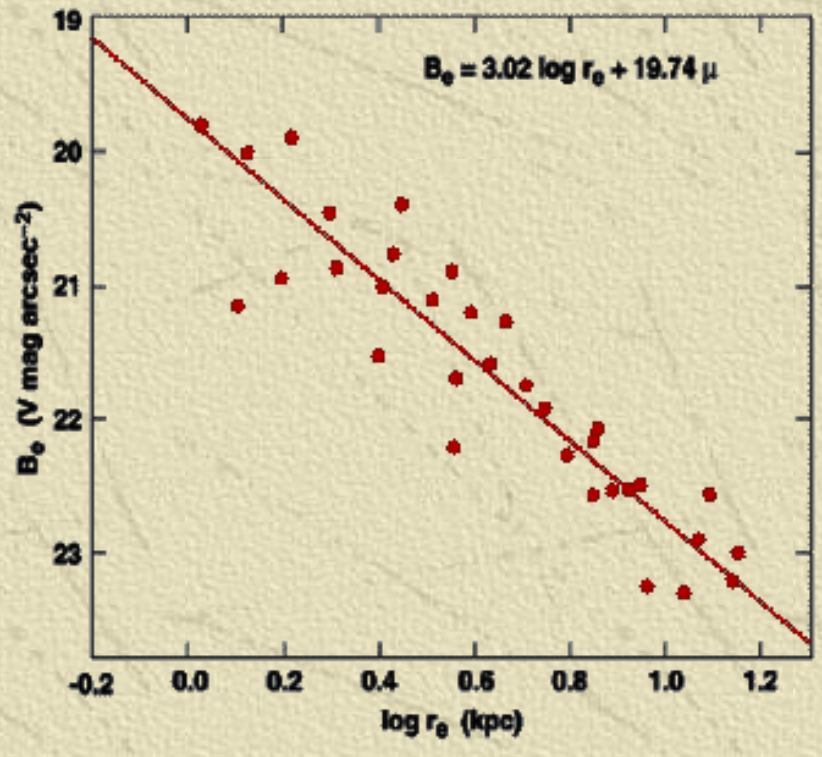


A Relação de Kormendy

A relação de Kormendy diz que quanto maior uma galáxia é, menor o seu brilho superficial

$$\mu_{e,V} \approx 2.9 \log [r_e(kpc)] + 19.5$$

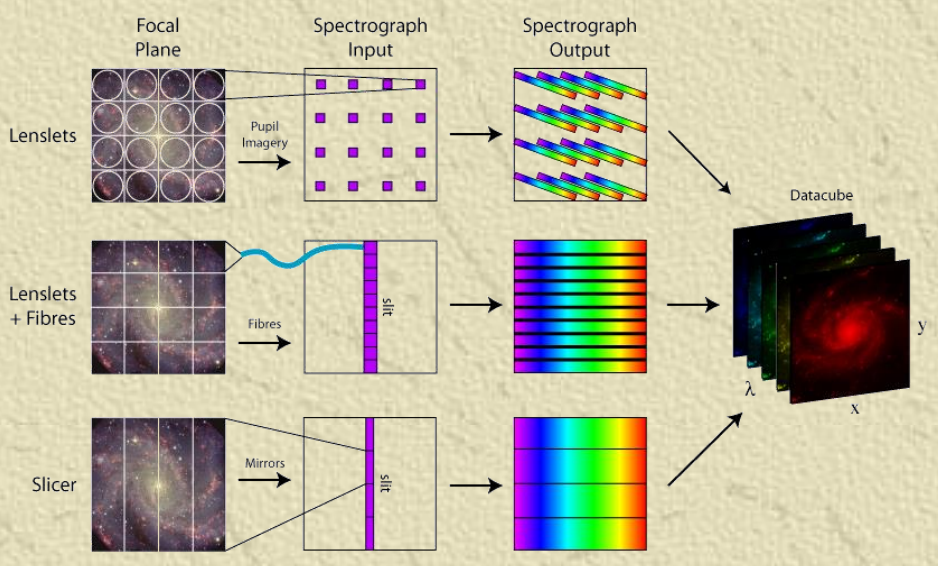


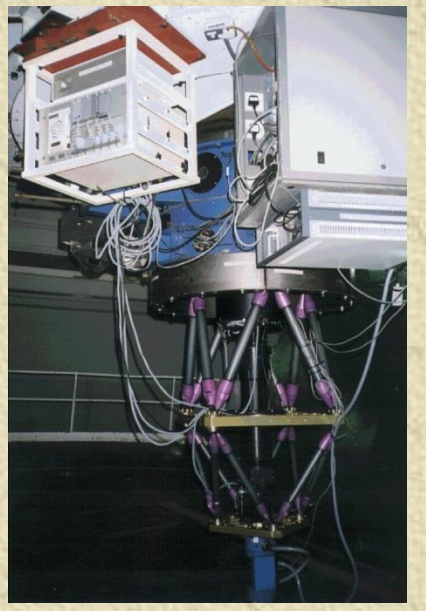


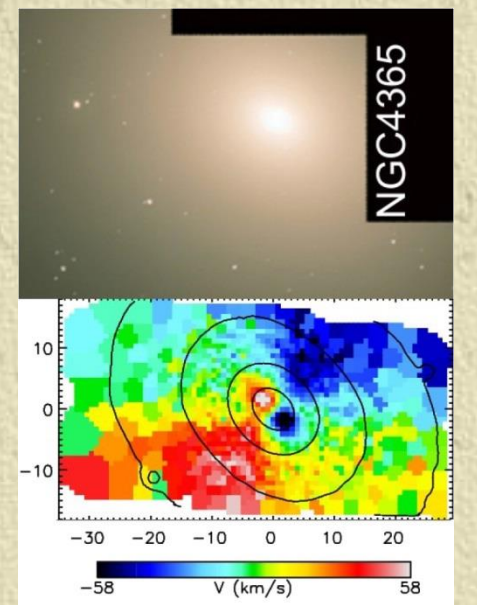
Em outras bandas fotométricas os coeficientes dessas expressões são diferentes!

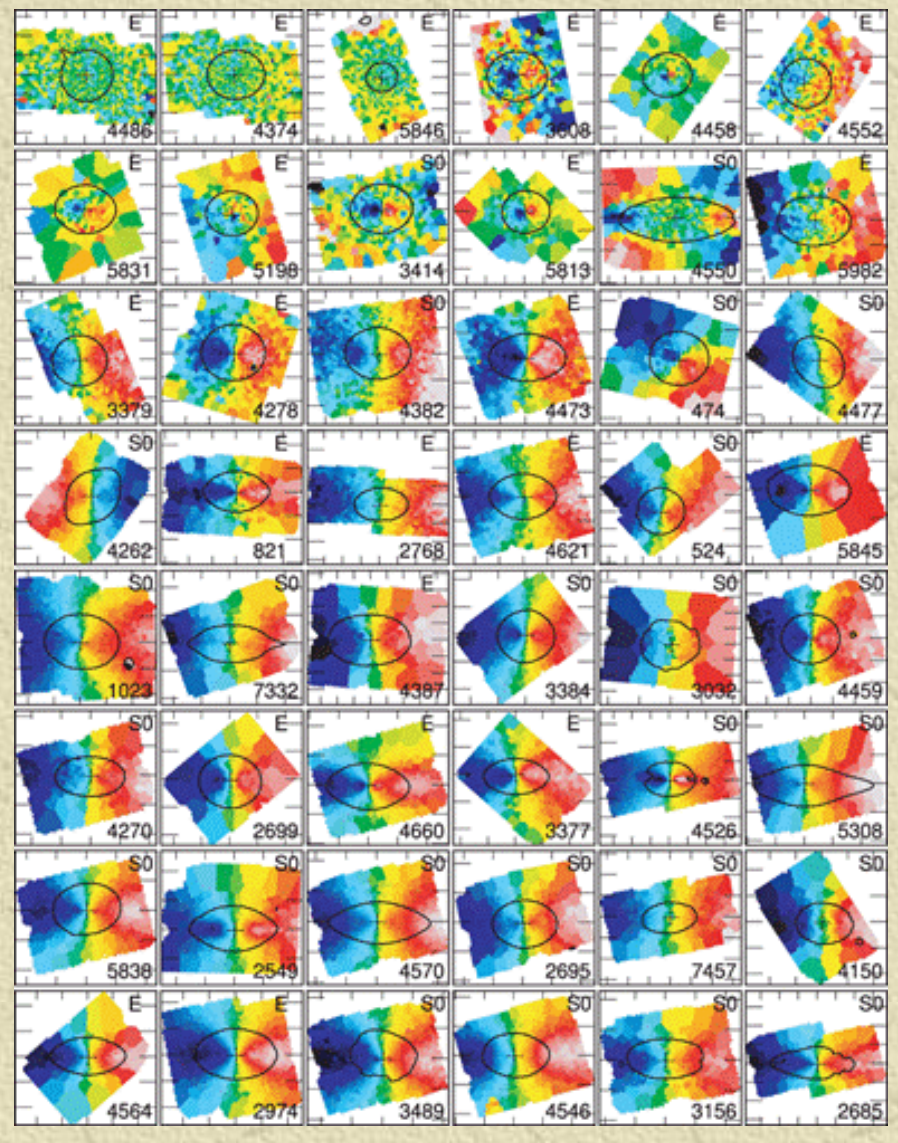
Observações de Campo Integral. Exemplo do SAURON

Observações espectroscópicas de campo integral utilizando fibras ópticas:









O Plano Fundamental

Dispersão nos dados levou astrônomos verificarem a dependência da relação de Faber-Jackson com outras grandezas ($L \propto \sigma_0^{\alpha}, 3 < \alpha < 5$). Foi então que se identificou a dependência da luminosidade da galáxia, com seu raio efetivo e sua dispersão de velocidades radiais.

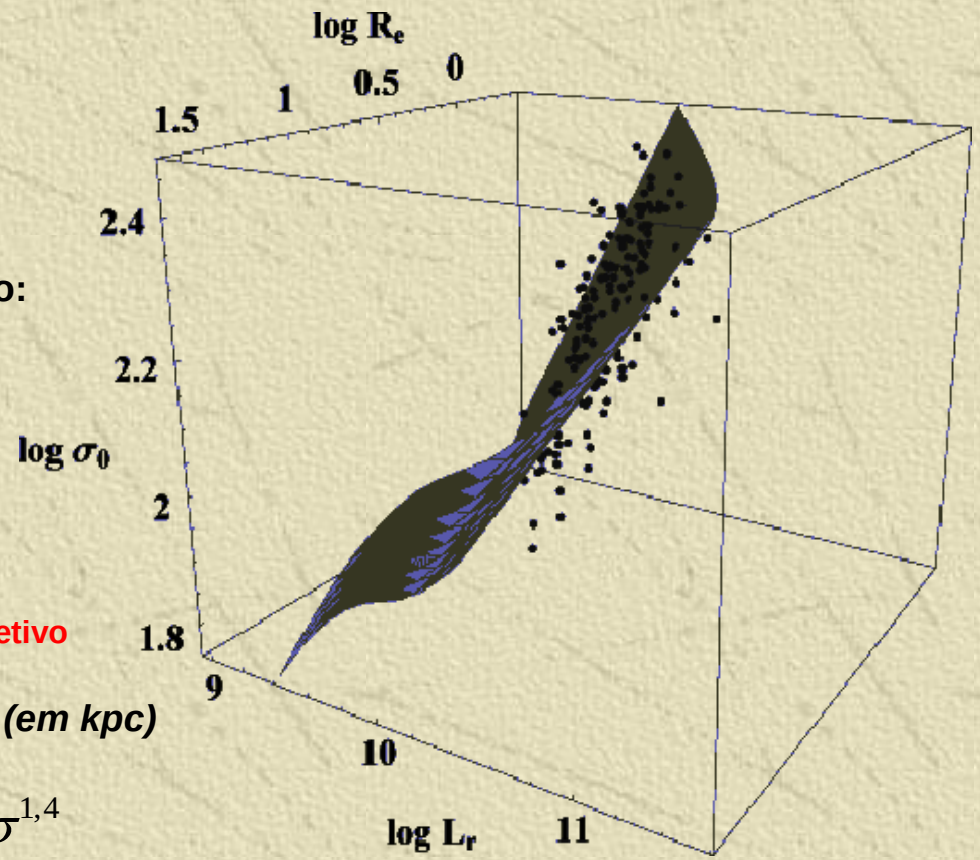
$$L \sim \sigma^{2,65} \cdot r_e^{0,65}$$

Pode ser deduzida a partir do teorema do Virial

O plano fundamental pode ser escrito como:

$$\log(r_e) = a \cdot \log(\sigma[km/s]) + \\ + 2,5 \cdot b \cdot \log(\mu_e[mag/arc\sec^2]) + c$$

onde a,b,c são constantes que dependem da banda fotométrica e μ_e é a magnitude superficial no raio efetivo



Admitindo D_n: diâmetro da abertura circular (em kpc)

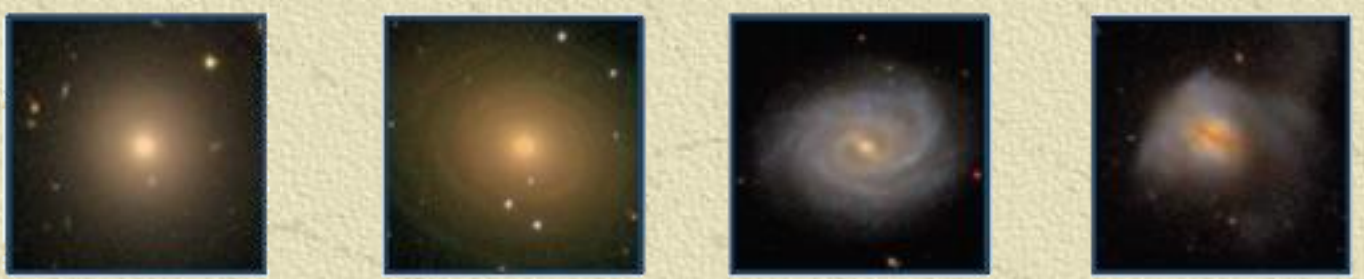
onde $\langle\mu_B\rangle$=20.75 mag arcsec^{-2}

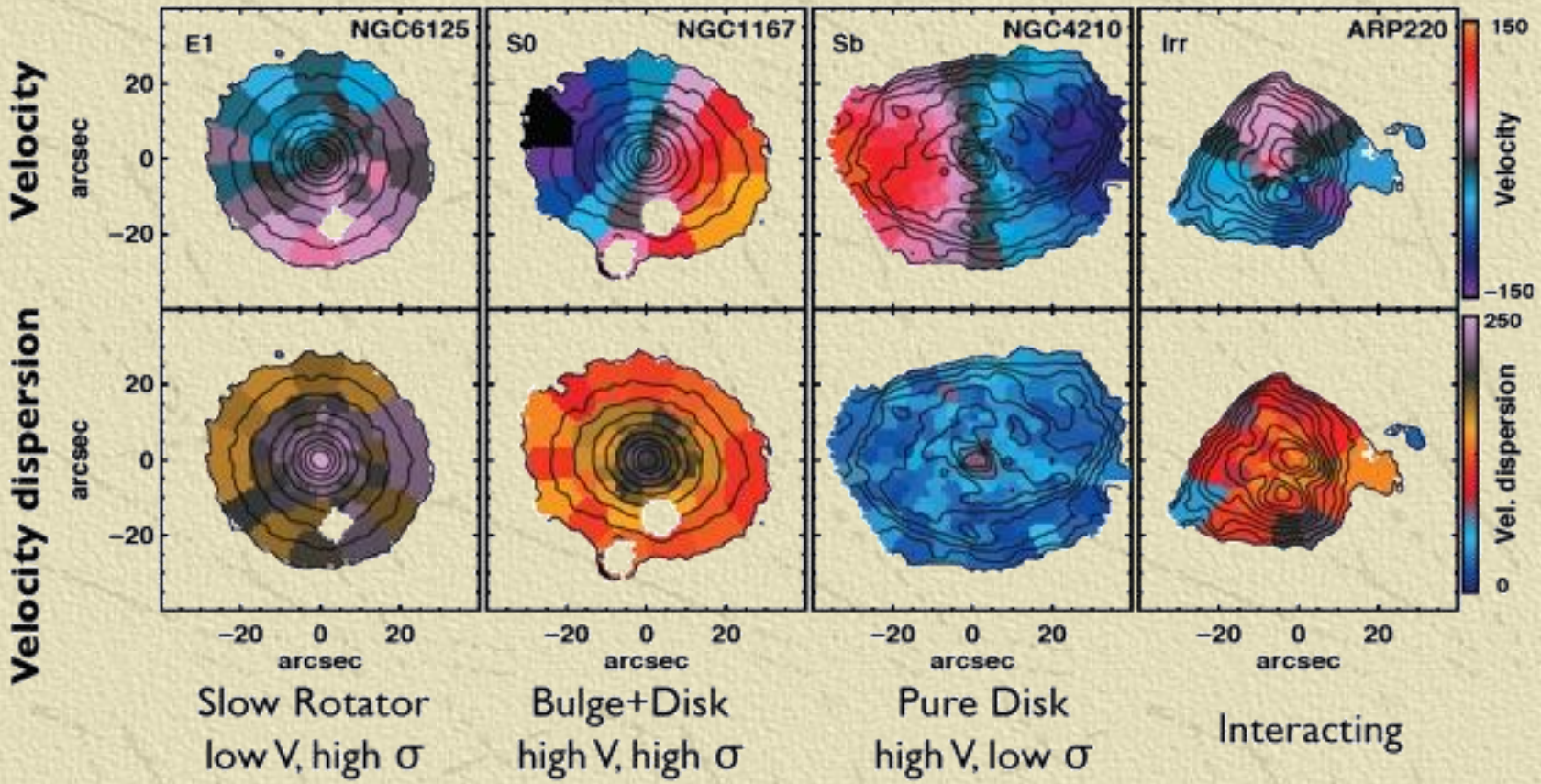
$$D_n \propto \sigma^{1,4}$$

(Dressler et al. 1987, os 7 samurais: + Burstein, Davies, Lynden-Bell, Faber, Terlevich, Wegner) introduzem o método D_n-σ para medir distâncias mais precisas do que com a relação Faber-Jacskon

Campo e Dispersão de Velocidades por Tipo de Galáxias

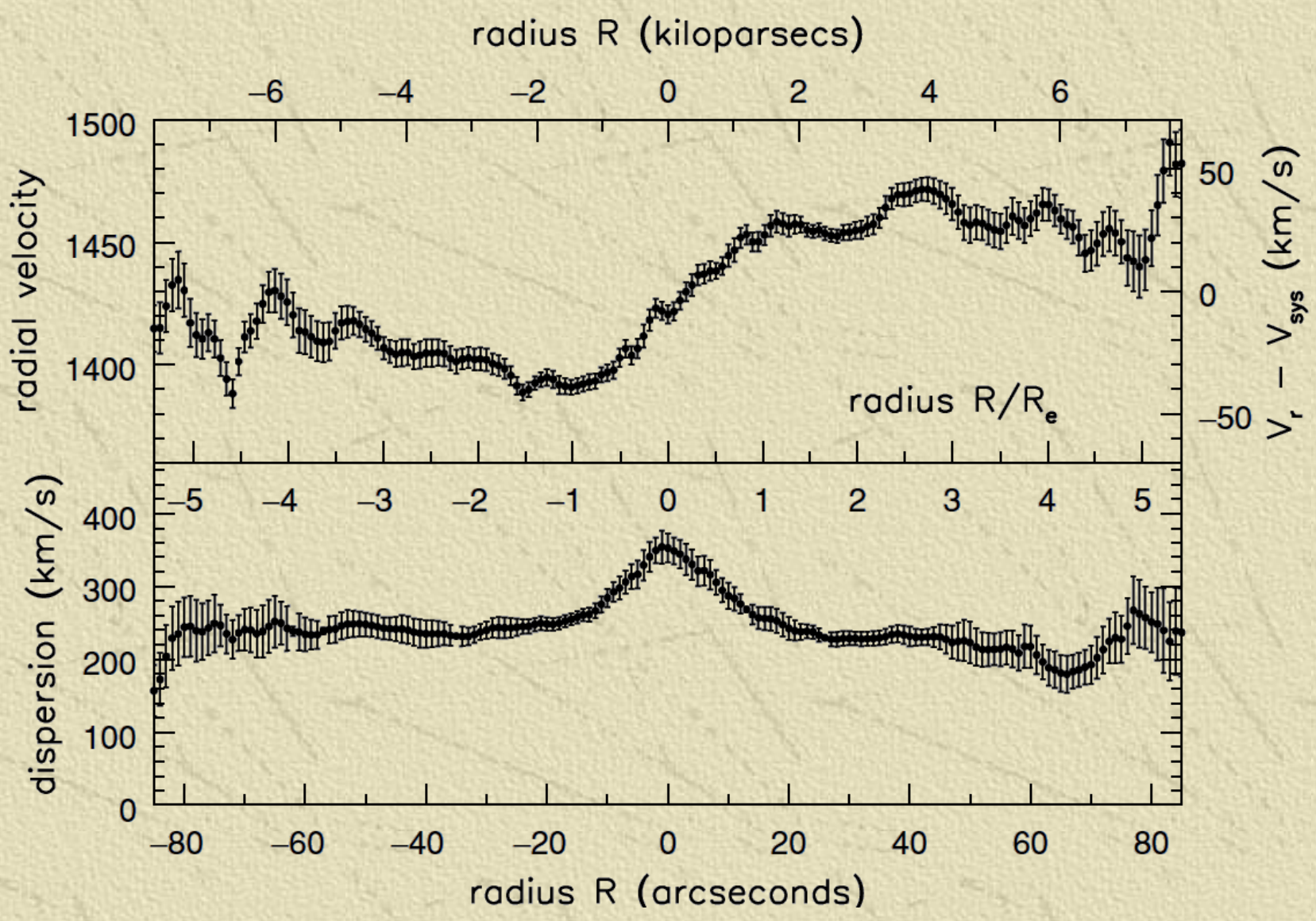
Comparações entre campos de velocidades entre galáxias espirais e elípticas.





Exemplo de Componente Radial e de Dispersão

No eixo maior da galáxia NGC1399:



Rotação em Galáxias Elípticas

Explicação de como essas galáxias rotacionam apela para o teorema do virial, especificamente para direção z em torno da qual admitimos que a galáxias gira. Assim pela equação geral:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 I_{zz}}{\mathrm{d}t^2} = 2\mathcal{KE}_{zz} + \mathcal{PE}_{zz},$$

Cujos termos são:

$$I_{zz} \equiv \sum_{\alpha} m_\alpha z_\alpha z_\alpha, \qquad \mathcal{KE}_{zz} \equiv \frac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha v_{z\alpha} v_{z\alpha}, \quad \mathcal{PE}_{zz} \equiv -\sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha\neq\beta}} \frac{1}{2}\frac{G m_\alpha m_\beta}{|\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta|^3}(z_\alpha - z_\beta)^2.$$

Se a galáxias achatada, então: $\mathcal{PE}_{zz} \ll \mathcal{PE}_{xx}$

Supondo a galáxia em equilíbrio: $2\langle\mathcal{KE}_{zz}\rangle + \langle\mathcal{PE}_{zz}\rangle = 0.$

Comparando com o que seria esperado para rotação supondo simetria da direção x e y:

$$\frac{\langle\mathcal{PE}_{zz}\rangle}{\langle\mathcal{PE}_{xx}\rangle} = \frac{\langle\mathcal{KE}_{zz}\rangle}{\langle\mathcal{KE}_{xx}\rangle} \approx \frac{\sigma_z^2}{V^2 + \sigma_x^2},$$

De modo que as razões dos potenciais dependem apenas das razões axiais do semi-eixo maior e menor reais da galáxia. Assumindo $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$.

$$\frac{\langle\mathcal{PE}_{zz}\rangle}{\langle\mathcal{PE}_{xx}\rangle} \approx (B/A) \quad = (1-\epsilon) \quad .$$

Rotação em Galáxias Elípticas

Então da comparação entre dispersão de velocidade e velocidade rotacional obtemos:

$$\frac{\sigma^2}{V^2+\sigma^2} = (1-\epsilon) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\frac{(V^2+\sigma^2)}{\sigma^2}} = (1-\epsilon) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\frac{V^2}{\sigma^2}+1} = (1-\epsilon) \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{V^2}{\sigma^2}(1-\epsilon) + (1-\epsilon) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{V^2}{\sigma^2} = \frac{1-(1-\epsilon)}{1-\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{V^2}{\sigma^2} = \frac{\epsilon}{(1-\epsilon)}$$

$$\boxed{\frac{V}{\sigma} = \sqrt{\frac{\epsilon}{(1-\epsilon)}}}$$

Parâmetro de Rotação

Define-se o parâmetro de rotação (V/σ):

$$(V/\sigma)^* \equiv \frac{(V_{\rm rot}/\sigma)_{\rm observed}}{(V_{\rm rot}/\sigma)_{\rm isotropic}}$$

Assumindo por simetria geometria que para o caso isotrópico:

$$\left(\frac{V_{\rm rot}}{\sigma}\right)_{\rm isotropic} \approx \left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)^{1/2}$$

V/σ > 0,7 (suportada por rotação)

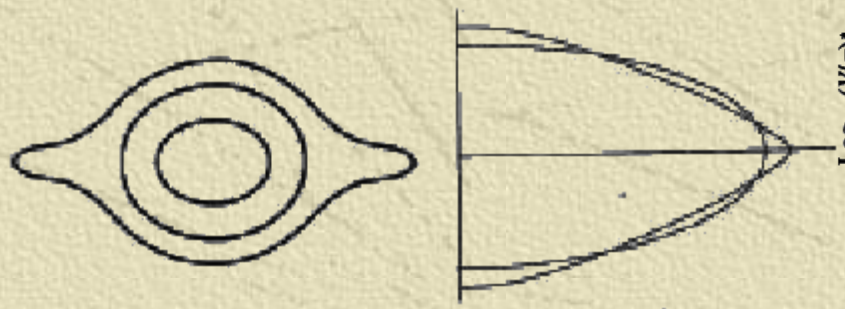
V/σ < 0,7 (suportada por pressão)

Para E brilhantes e gE: V/σ ~ 0,4

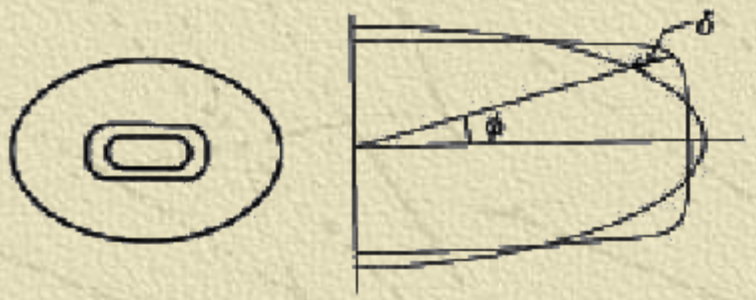
NGC 1700: Elliptical Galaxy and Rotating Disk

Desvios da Elipticidade

- *Algumas E têm isofotas "pontudas": tipo disco (diskiness)*

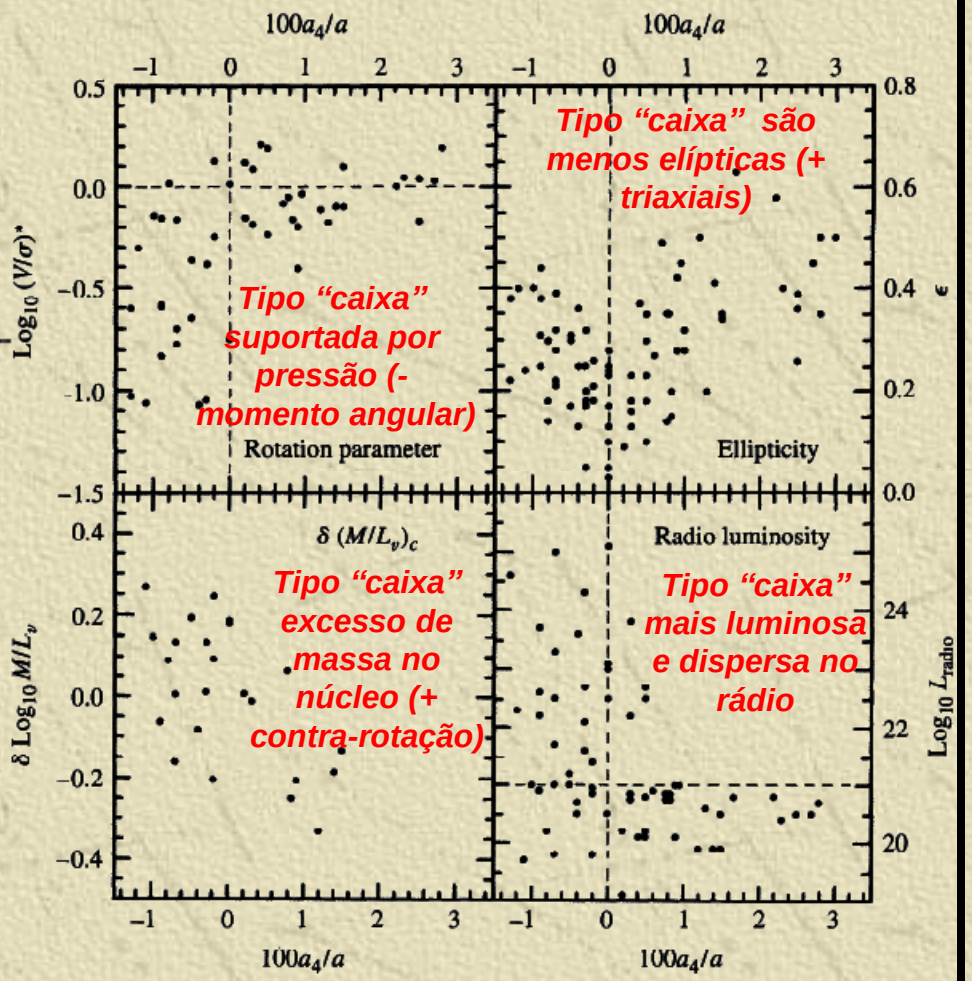


- *Algumas E têm isofotas "achatadas": tipo caixa (boxiness)*



$$a(\theta) = a_0 + a_2 \cos(2\theta) + a_4 \cos(4\theta) + \cdots ,$$

$a_4<0 \Rightarrow$ boxy



Kormendy and Djorgovski (1989)

As E tipo disco tendem a ter mais rotação que as tipo caixa

Tipos de Galáxias Espirais

A estrutura espiral é utilizada para distinguir objetos na Classificação de Hubble e o método de Elmegreen & Elmegreen (1982) é usado para classificar diferentes estrutura espirais em uma seqüência.

NGC4414 (Hubble Space Telescope)

Galáxias floculentas: 30%

Melhor descritos por modelos em que a estrutura espiral NÃO É estável (eg. Gerola & Seiden, 1978).

+ ?

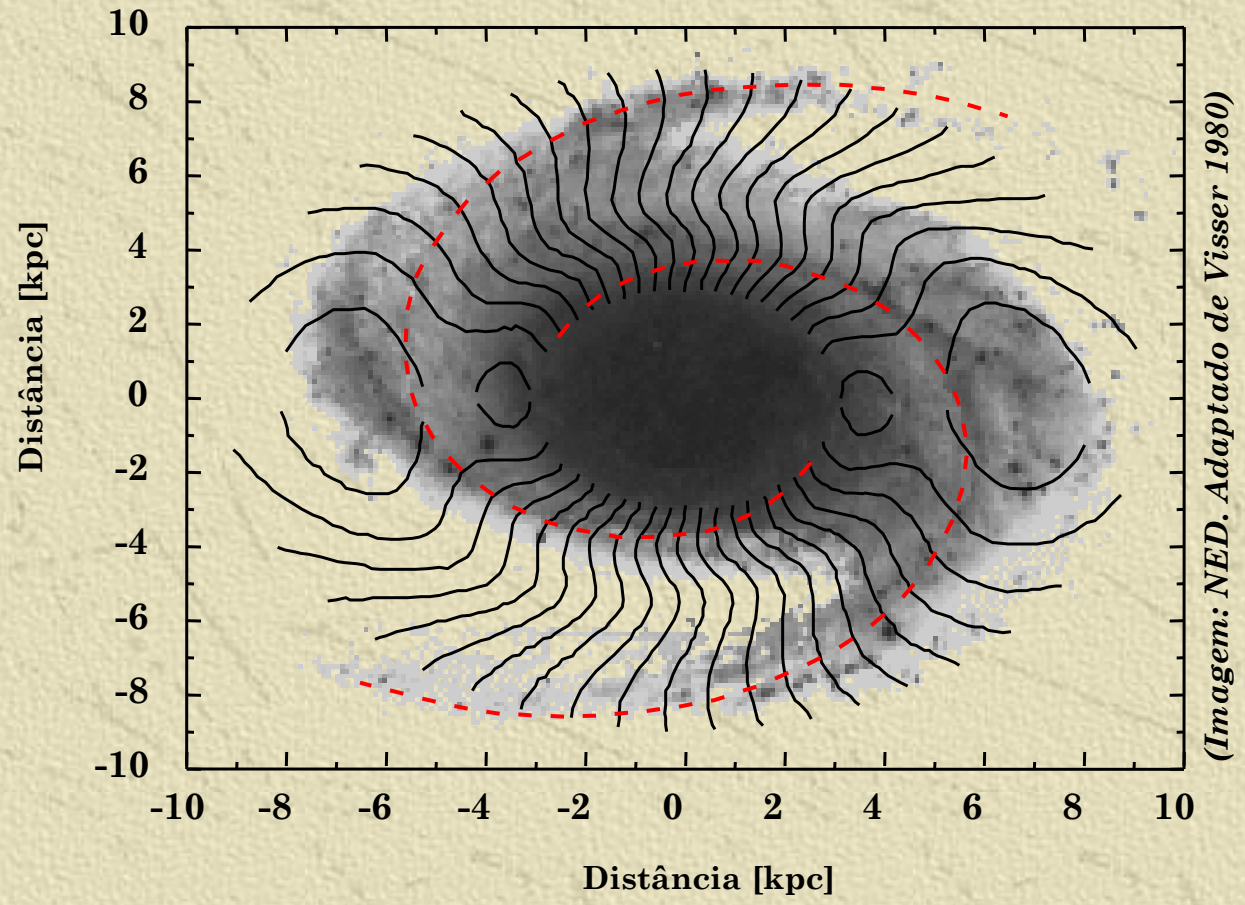
M51 (Hubble Space Telescope)

Galáxias com braços definidos: 70%

Melhor descritos por modelos em que a estrutura espiral É estável (eg. Lin & Shu, 1969).

Efeito dos Braços Espirais na Curva de Rotação

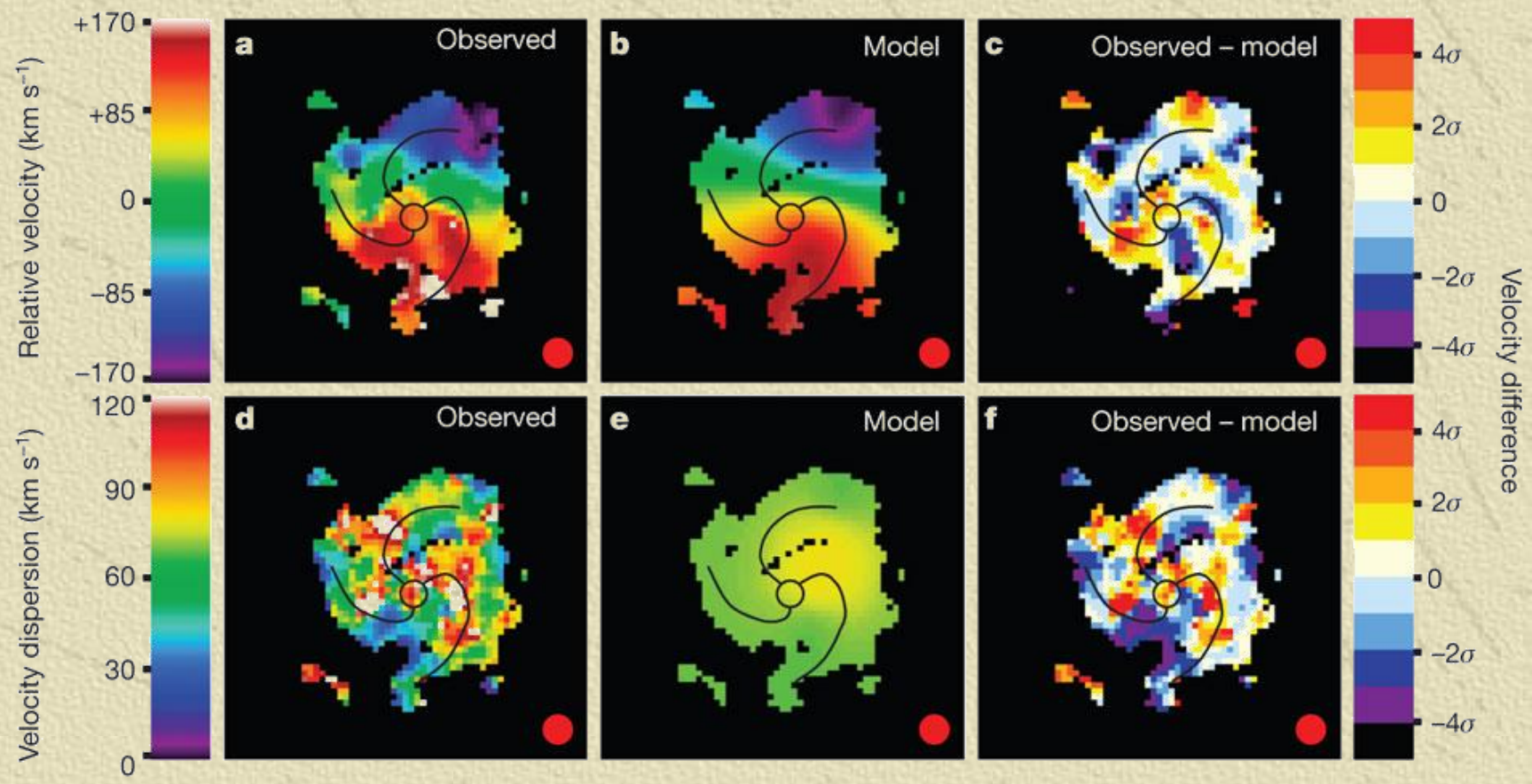
Há muito tempo tem sido identificadas flutuações sistemáticas dos campo de velocidade correlacionadas com os braços espirais. Isso sugere um mecanismo global atuando sobre toda a galáxia.



(Imagem: NED. Adaptado de Visser 1980)

Campo de Velocidades e Mapa de Dispersão de Velocidades para Galáxia BX442

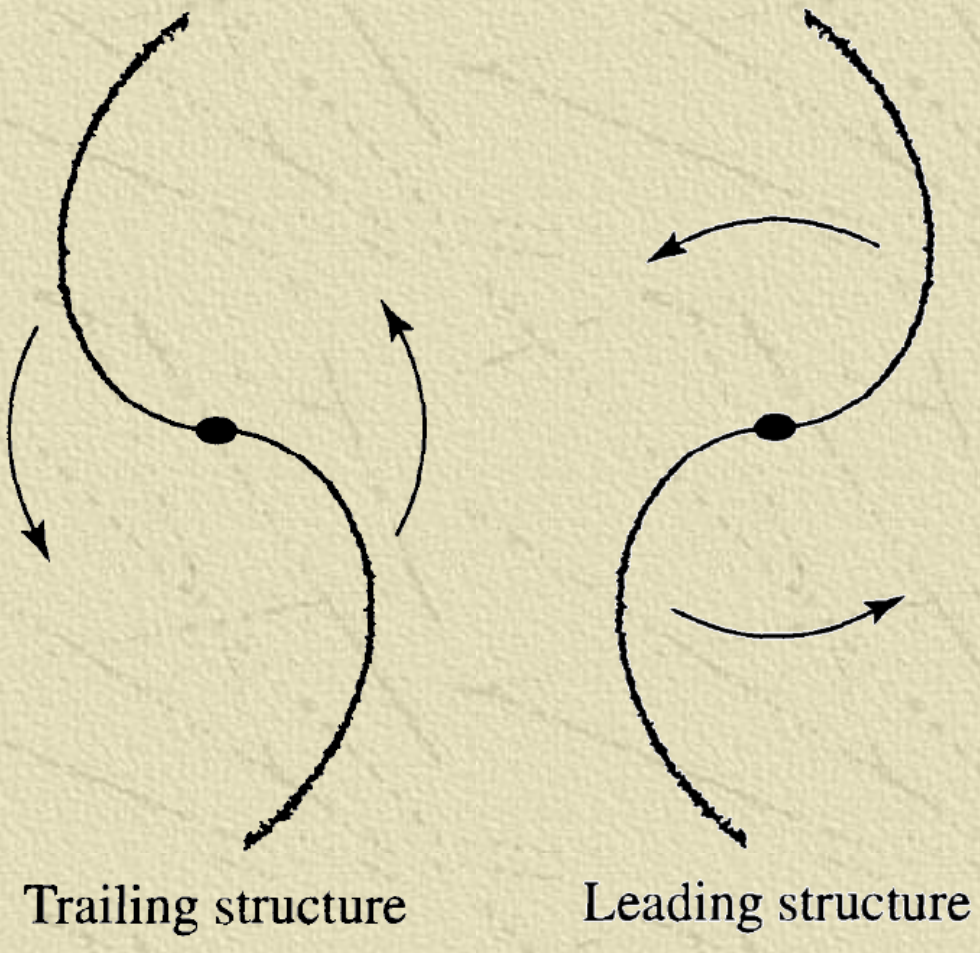
Galáxia espiral à grande distância, com campo de velocidade modelado e subtraído das velocidades observadas, revelando grandes dispersões de velocidades.

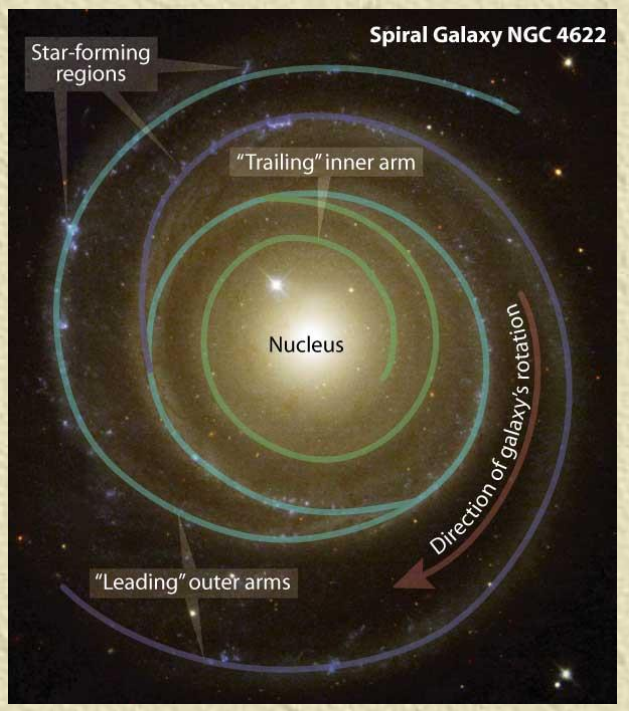


DR Law *et al. Nature* 487, 338-340 (2012) doi:10.1038/nature11256

Direção da Rotação e Orientação dos Braços Espirais

Maior parte das galáxias são "trailing", embora existam exemplos importantes galáxias com braços "leading" como NGC4622 e um braço em M31 (provavelmente devido uma interação com objeto girando em direção oposta aos braços).





Buta et al. (2002)

http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2002/03/image/b/format/large_web/

Estudando os Resíduos

De mesma forma que com o perfil de luminosidade pode se subtrair componentes se faz o mesmo com o campo de velocidades, se subtraindo apenas a componente de velocidades circular

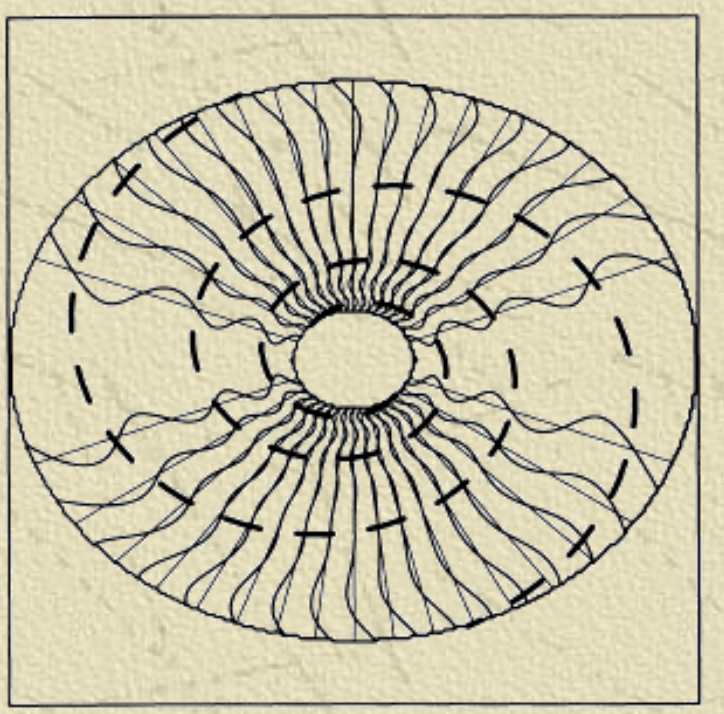


FIG. 1.—This is a model velocity field (line-of-sight observed velocities) of a two-armed spiral galaxy. The model galaxy disk is inclined 35° to the plane of the sky, and the spiral arms have pitch angle 10°. The rotation curve is flat (at 300 km s^{-1}) and the spiral potential is 15% of the axisymmetric potential. Contours (*bold*) are separated by 20 km s^{-1}. The thinner, straight lines are the unpertubed (axisymmetric) velocity contours by which the spiral perturbations may be gauged. The minima of the two-armed spiral potential are graphed as dashed curves.

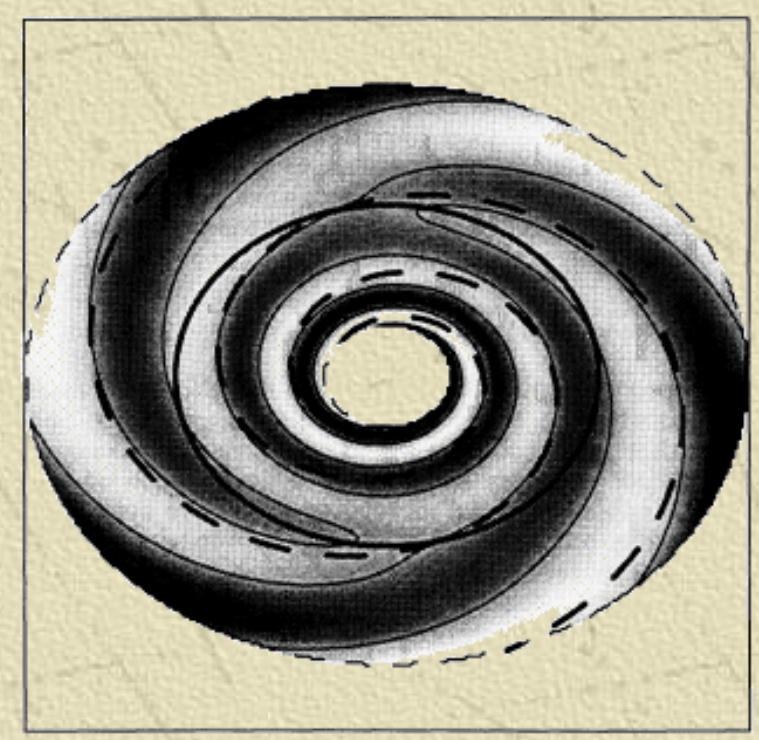


FIG. 2.—This is a model velocity field due solely to a spiral density wave. That is, the axisymmetric component of the motion has been removed. The line-of-sight radial velocities are represented by lighter shades for approaching velocities and darker shades for receding. The model galaxy is the same one as in Fig. 1. The inner and outer Lindblad resonances bound the inner and outer edges of the elliptical annulus, and the corotation resonance is shown as an ellipse. The minima of the two-armed spiral potential are graphed as dashed curves.

Canzian 1993 ApJ...414..487C modelando M81

Aplicação para NGC4321

De mesma forma que com o perfil de luminosidade pode se subtrair componentes se faz o mesmo com o campo de velocidades, se subtraindo apenas a componente de velocidades circular

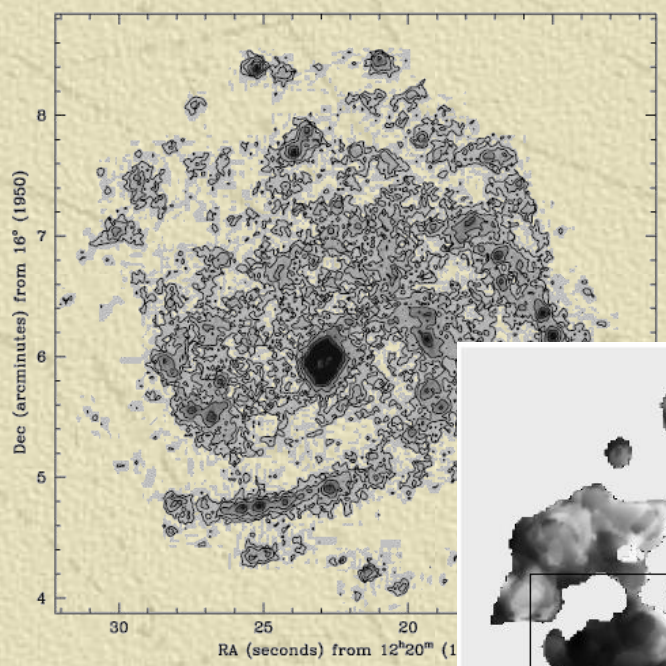
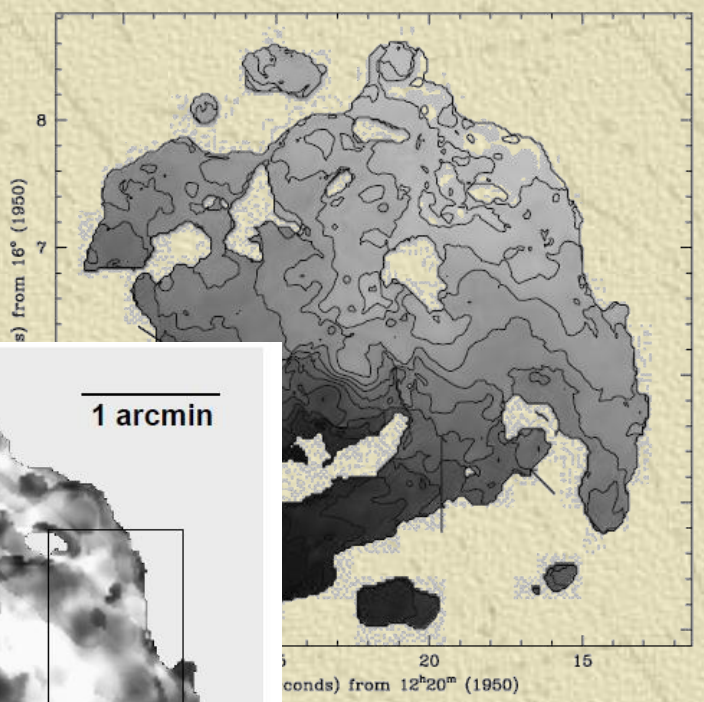
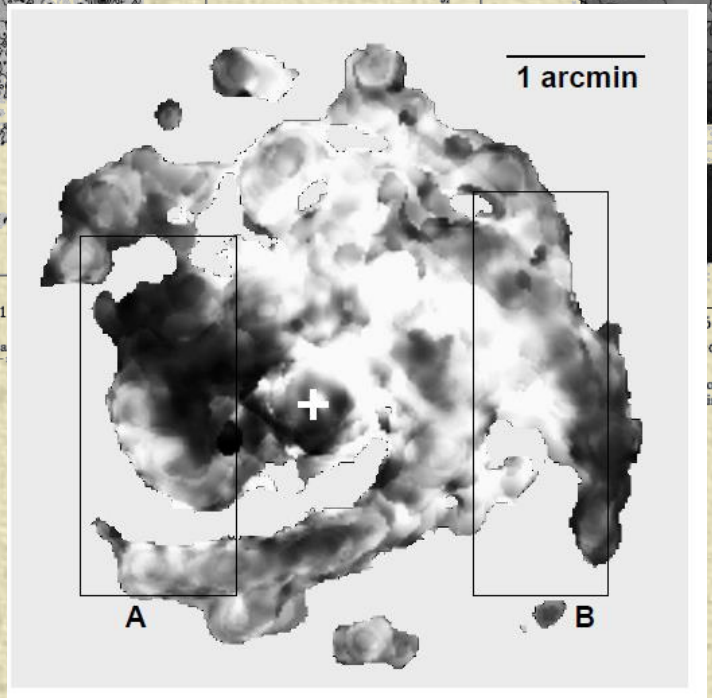


FIG. 4.—Hα intensity distribution for the NGC 4321 observations. Each successive contour is a
ntour is at 0.18 photons s⁻¹ arcsec⁻², and the highest intensity spot is at 6.96 photons s⁻¹ arcsec⁻



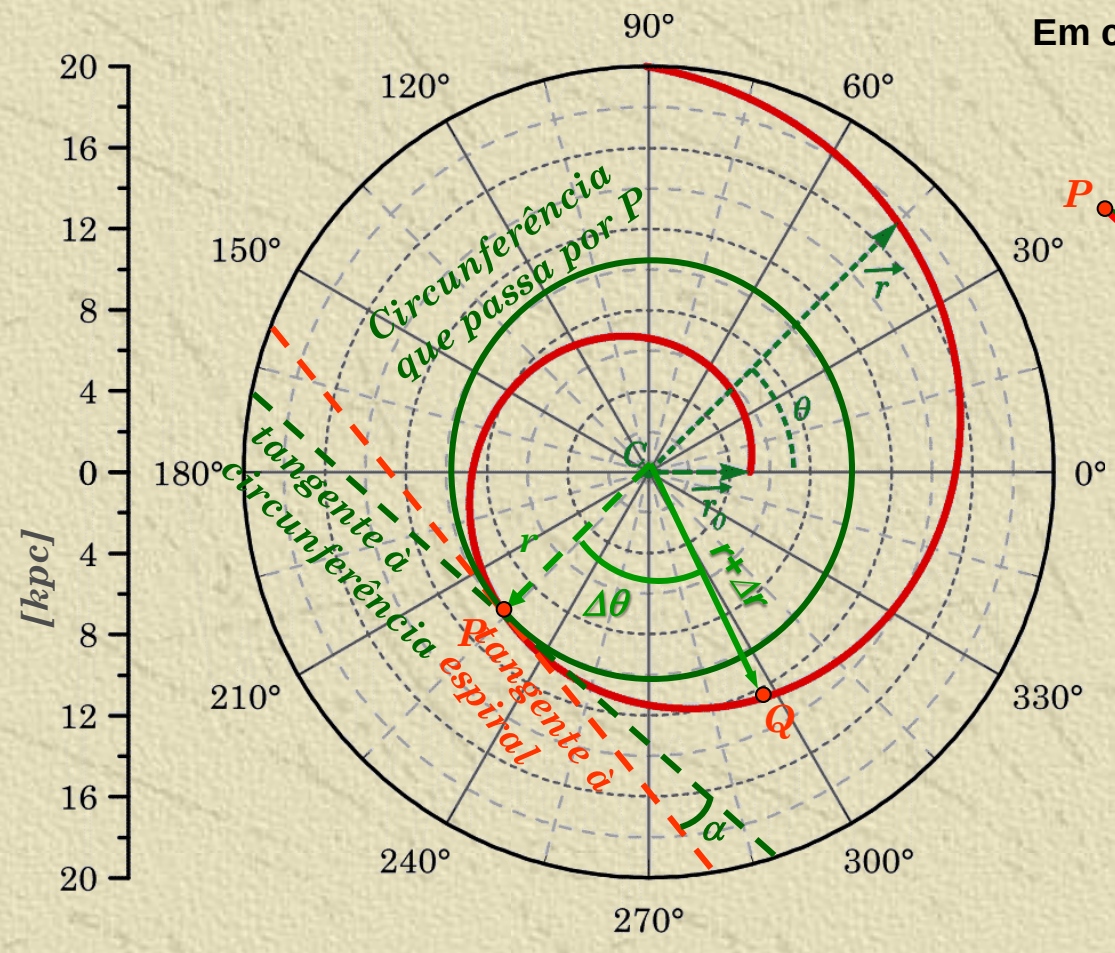
ours are separated by 20 km s⁻¹; the indicated contour is at the systemic velocity 1572 km
ing side is to the southeast. The spatial resolution is 3" FWHM.



Canzian & Allen_1997
ApJ...479..723C

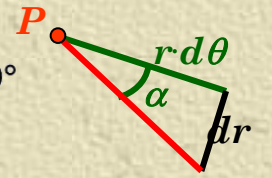
Forma da Estrutura Espiral

Verifica-se na literatura (eg. Schlosser & Musculus, 1984; Russell & Roberts, 1992 e Ma, 2001;) que muitas galáxias espirais são bem ajustadas por funções de espirais logarítmicas.



Em coordenadas polares: $\theta = \phi(r)$

No limite de $\Delta\theta$ pequeno:



$$\tan\alpha = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}$$

Isolando $\theta(r)$:

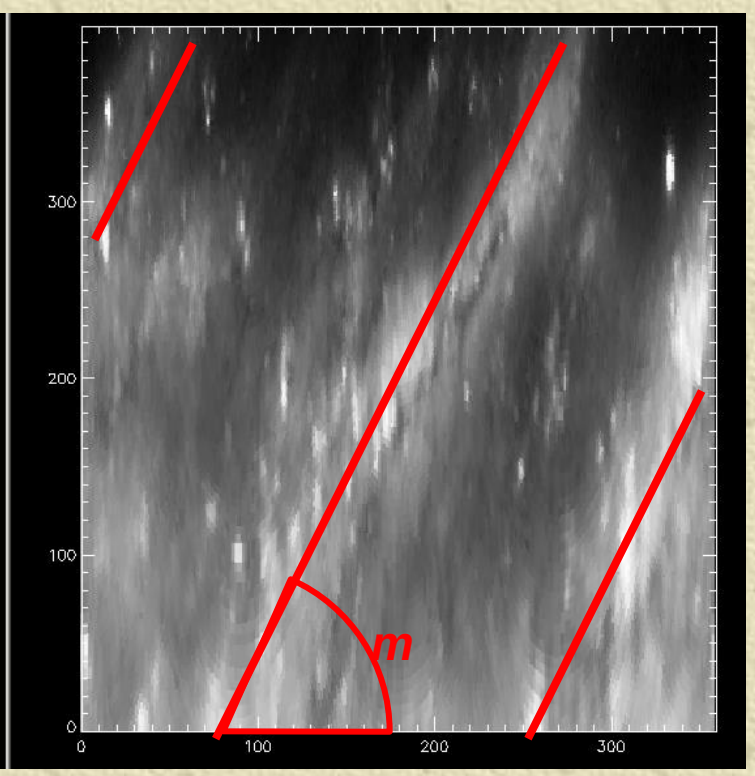
$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \frac{1}{\tan\alpha}\cdot\int_{r_0}^{r}\frac{1}{r}dr$$

Conservando o ângulo α ao longo da espiral:

$$\boxed{\theta(r) = \theta_0 + \frac{1}{\tan\alpha}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}$$

Retificação dos Braços Espirais

Parametrizando o equação de uma espiral logarítmica como uma reta.

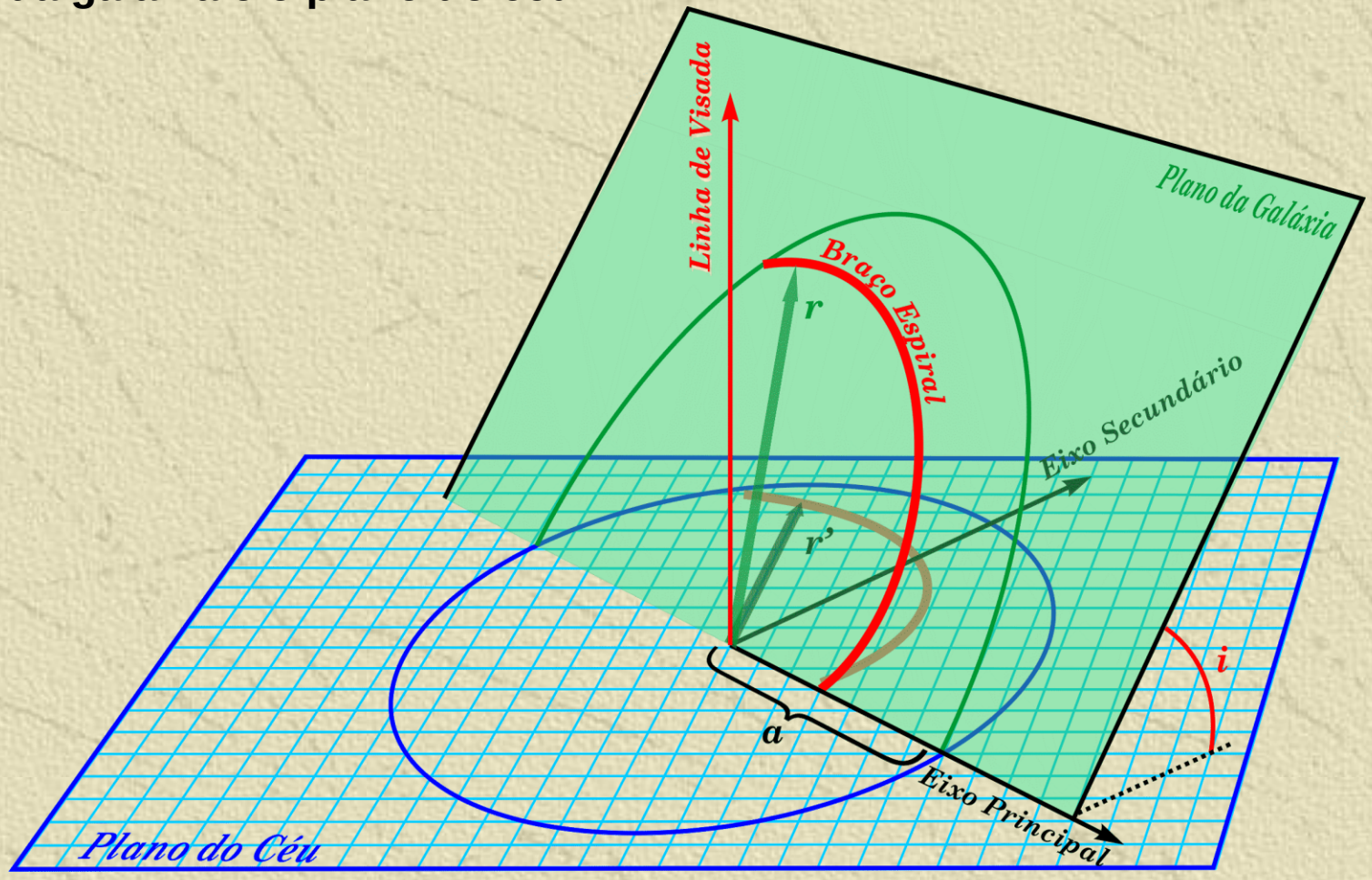


$$\theta(r) = \theta_0 + \frac{1}{\tan\alpha}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

$$y(x) = n + m \cdot x$$

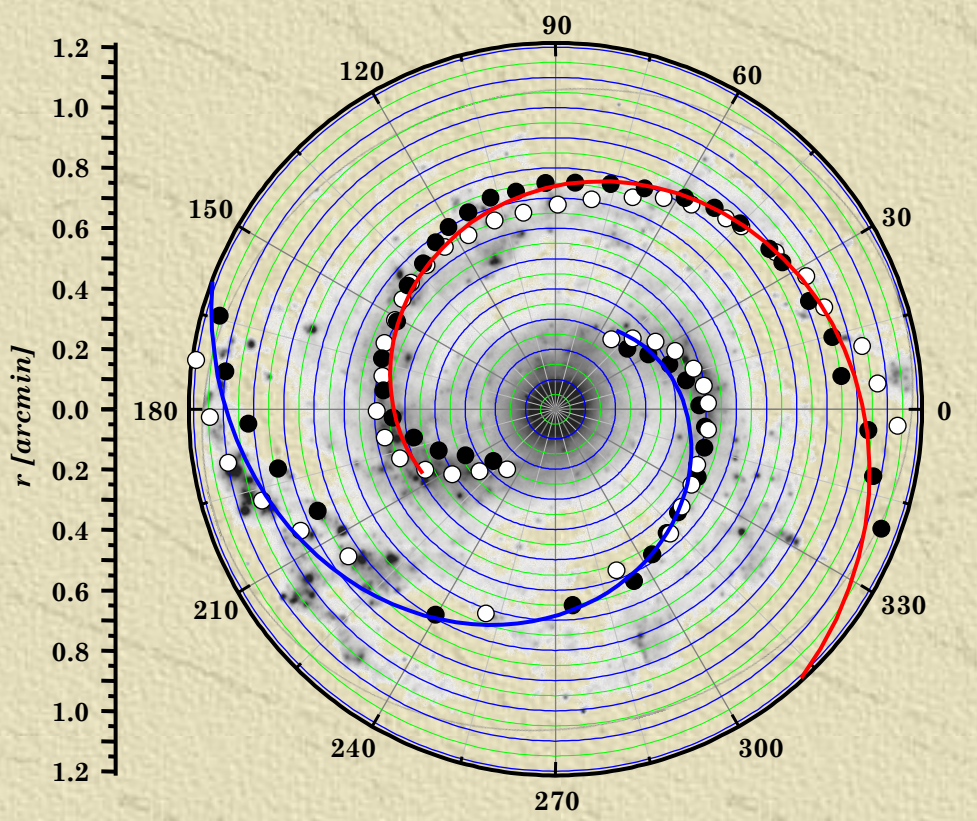
A Projeção dos Braços Espirais no Plano do Céu

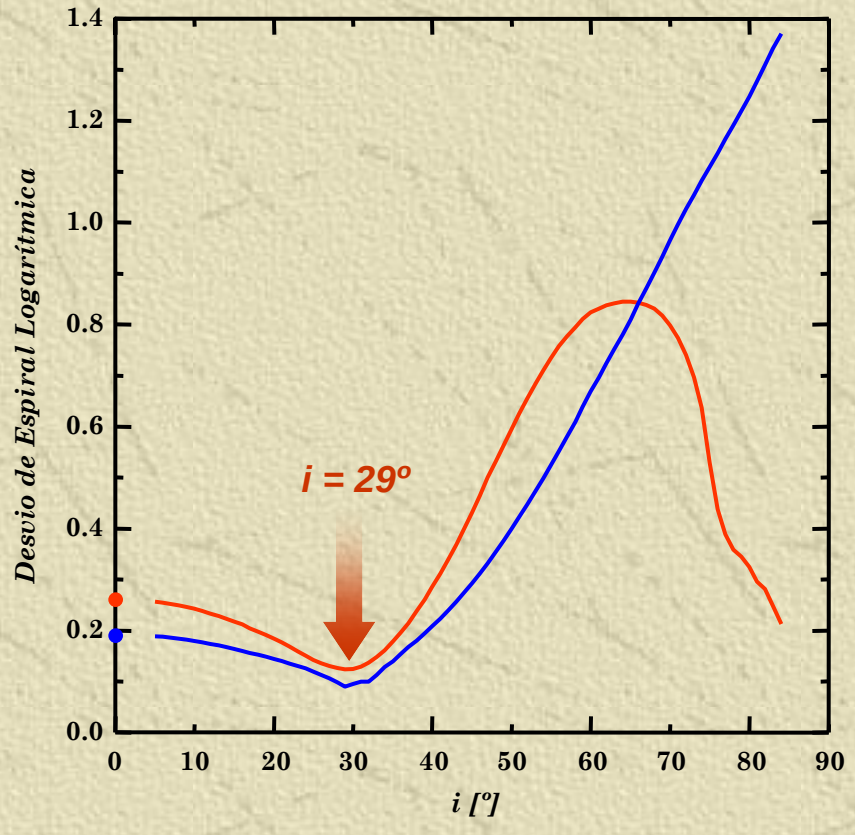
Considerando que os braços espirais estão contido no plano da galáxia, então cada um de seus pontos sofrerá um efeito de projeção dependente do ângulo azimutal que ele guarda com relação à linha de interseção entre o plano da galáxia e o plano do céu.



Utilizando os Braços Espirais para Determinação dos Ângulos de Projeção de Galáxias Espirais

Utilizando um procedimento semelhante ao de Ma (2001), mas fixando o ângulo de posição com o valor encontrado para o eixo cinemático principal obtivemos a inclinação que minimiza a dispersão no ajuste de espirais logarítmicas (Scarano Jr, 2013). Exemplo para NGC1042:



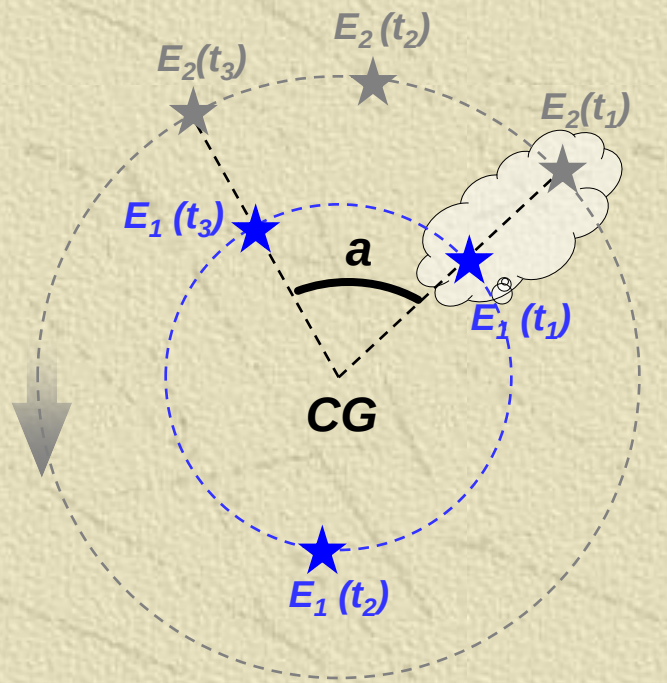


Problema do Enrolamento dos Braços Espirais

Considerando duas estrelas em movimento circular no plano galáctico partindo da mesma direção, com raios orbitais r_1 e r_2, velocidades de rotação v_1 e v_2 e periodos de rotação P_1 e P_2, quanto tempo levaria para eles estarem separados de meia volta?

Mesmo procedimento que o usado para determinar período sinódico de um planeta:

$$1/P_2 = 1/P_1 - 1/T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}$$



Assim, meia volta corresponde a:

$$T = \frac{1}{2} \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}$$

Assumindo r_1=4kpc, v_1=210 km/s, P_1 = 0,98x10^8 anos, e r_2 =10 kpc, v_2=250 km/s, então P_2=2x10^8 anos. Então:

$$T = 3{,}3 \times 10^7 \text{ anos}$$

Estrela 1
$P_1 \Rightarrow 360^0$
$T \Rightarrow 360 + a$

Estrela 2
$T \Rightarrow a$
$P_2 \Rightarrow 360^0$

Para uma separação de 0,1 kpc para as duas estrelas estarem em lados opostos é da ordem de 10^8 anos!!!

Alguns Objetos Presentes em Galáxias Espirais

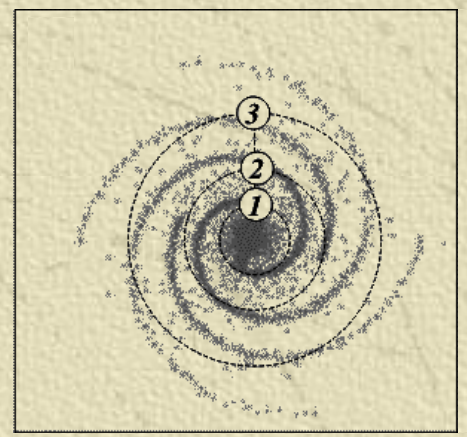
Diversos objetos podem ser utilizados para o estudo de galáxias espirais, mas na prática observacional as condições físicas dos objetos limita o que pode ser observado.

Parâmetro	*Atmosferas Estelares*	*Regiões HII*	*Nebulosas Planetárias*	*Restos de Supernovas*
População	I – II	I	II	I - II
Temperatura [K]	10^3 - 10^4	10^4	10^4	10^5
Densidade [cm^{-3}]	10^{11} - 10^{15}	10 - 10^4	10^2 - 10^5	10^{-2} - 10^3
Dimensão [pc]	10^{-9} – 10^{-5}	1 - 10^2	10^{-2} - 1	3 - 50
Velocidade [km/s]	10^2 – 10^3 *	10	25	300 - 6000
Massa [M_{sol}]	10^{-17} – 1	10^2 - 10^4	10^{-2} - 1	1 - 10

Regiões de formação estelar se desmantariam em uma escala de tempo menor que a idade das estrelas observadas neles!!!

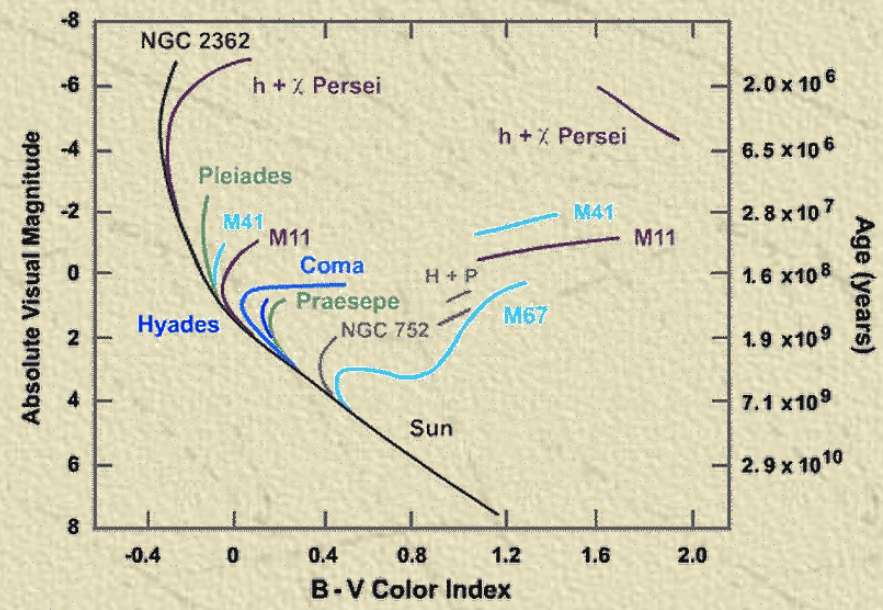
Estabilidade dos Braços e Enrolamento dos Braços

Braços meramente materiais se enrolariam devido à curva de rotação diferencial. Neste caso deveríamos registrar galáxias com estágios de enrolamento mais avançados do que realmente observamos.



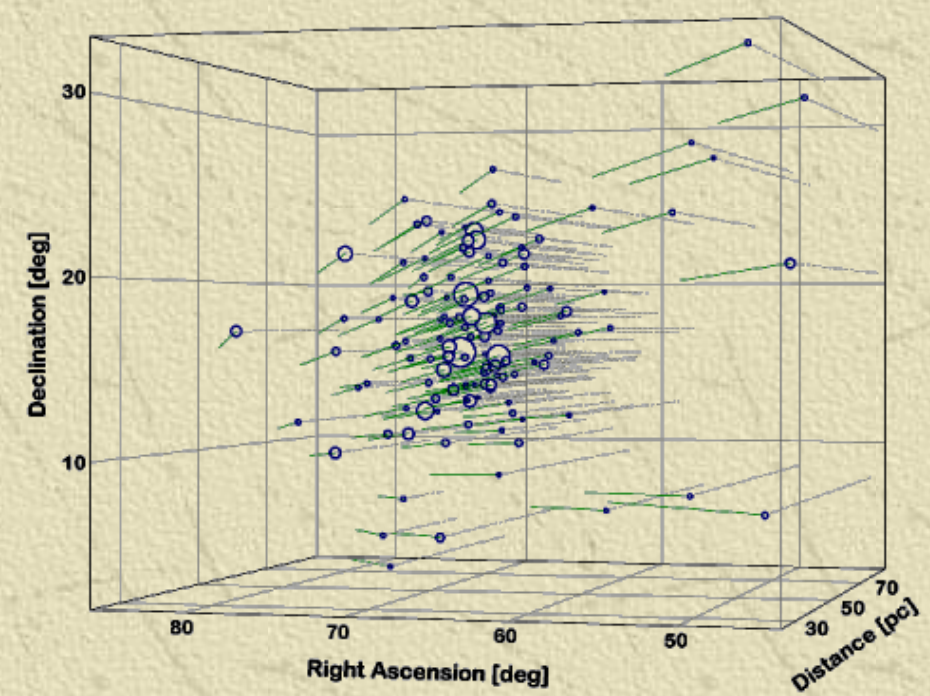
Open Clusters as Spiral Arms Tracers in Our Galaxy

In our Galaxy it is possible to use open clusters to trace the spiral arms in different moments in the past, using their ages and the proper motions of their stars.



HR Diagrams for Various Open Clusters

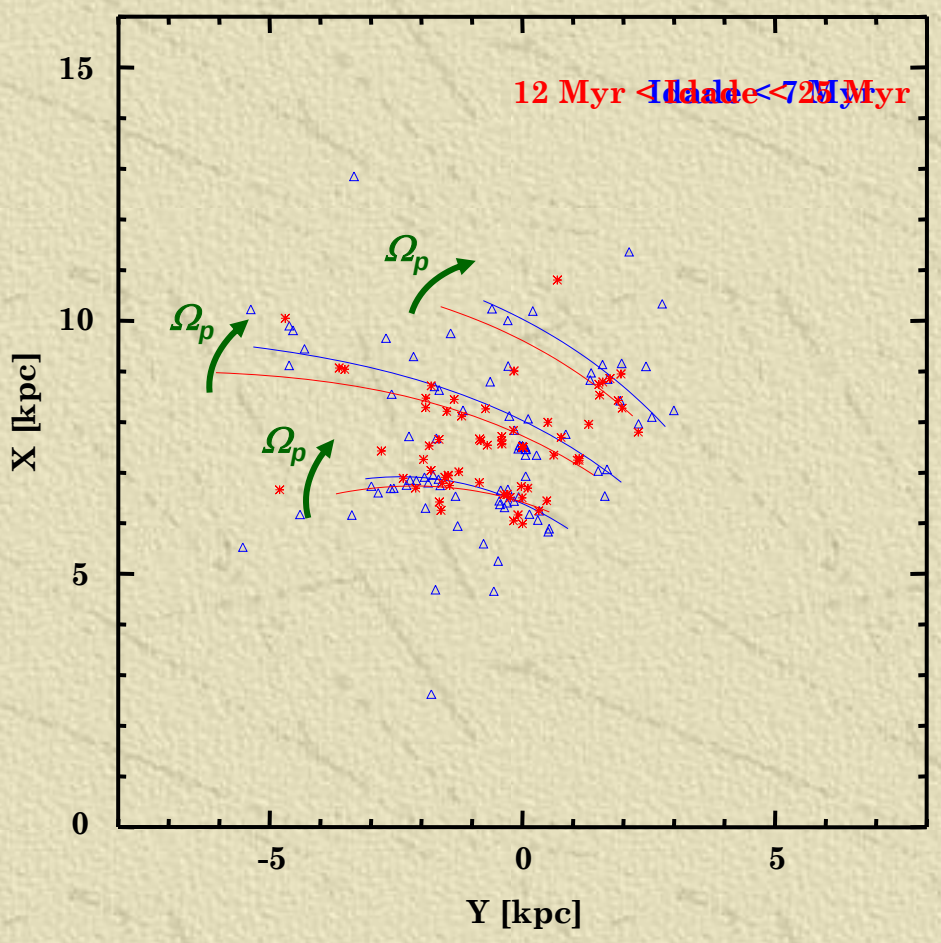
Mike Guidry, University of Tennessee



Hyades - Lindegren, Madsen & Dravins (2000)

Aglomerados Abertos como Traçadores da Estrutura Espiral em Nossa Galáxia

Identificando as posições ocupadas por aglomerados abertos em diferentes momentos do passado é possível traçar a posição dos braços espirais e verificar sua auto-consistência.



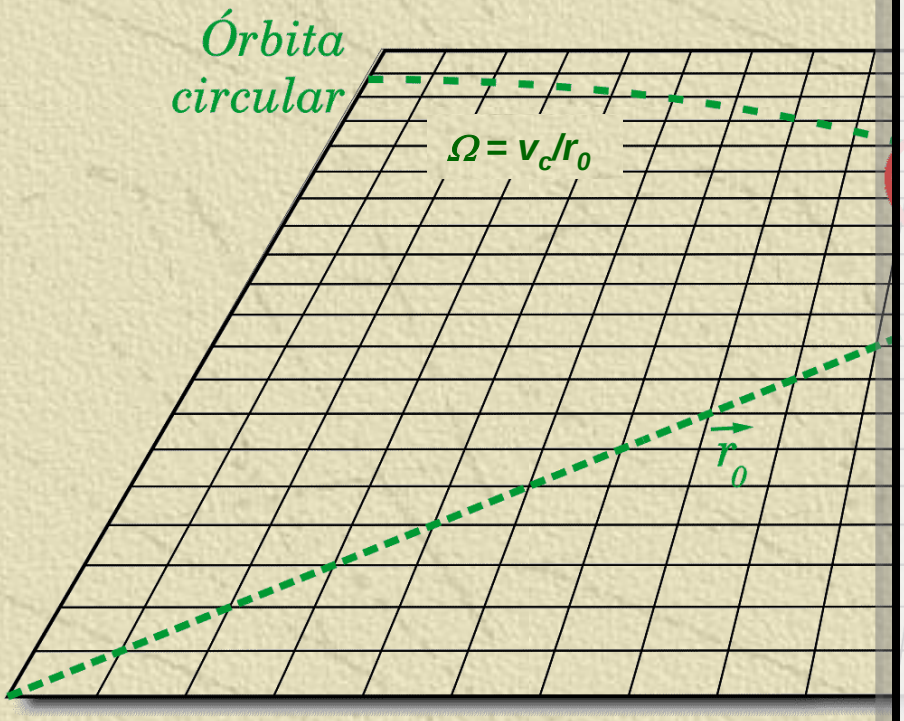
Conforme Dias & Lépine (2005):

Ω_p = 24 km/s/kpc

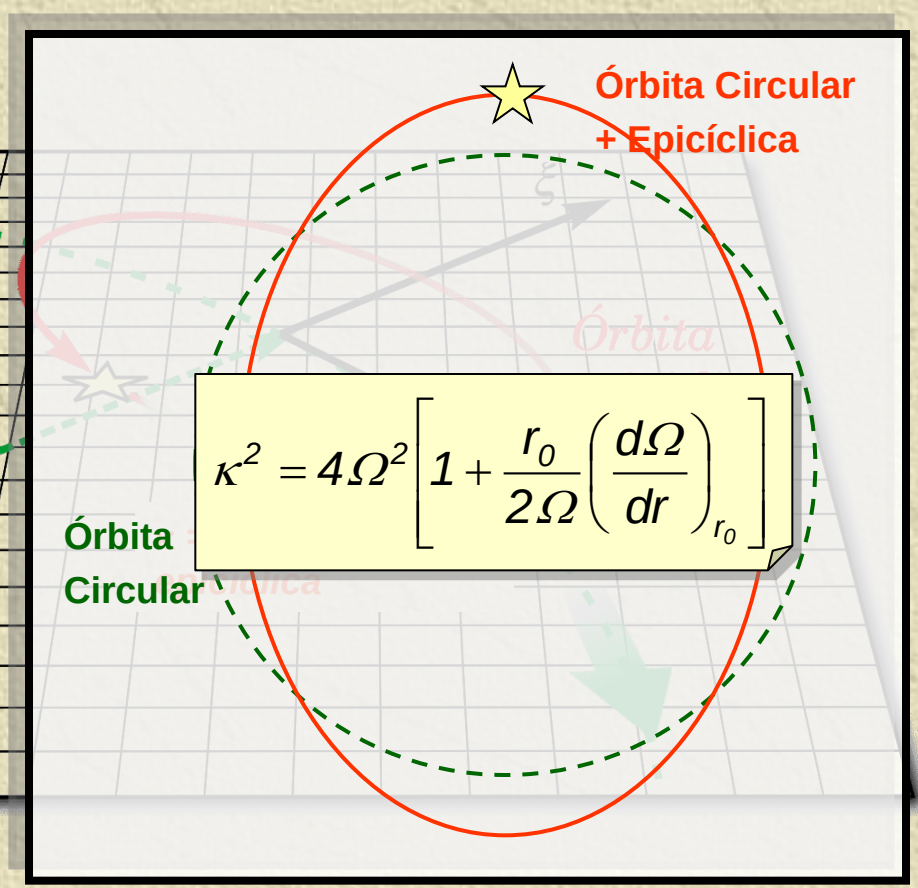
Órbitas Não Circulares - Epicíclos

Uma primeira alternativa para uma descrição mais completa do movimento no plano de uma galáxia é feita pela introdução da teoria de pequenas perturbações.

No referencial que acompanha a órbita circular:



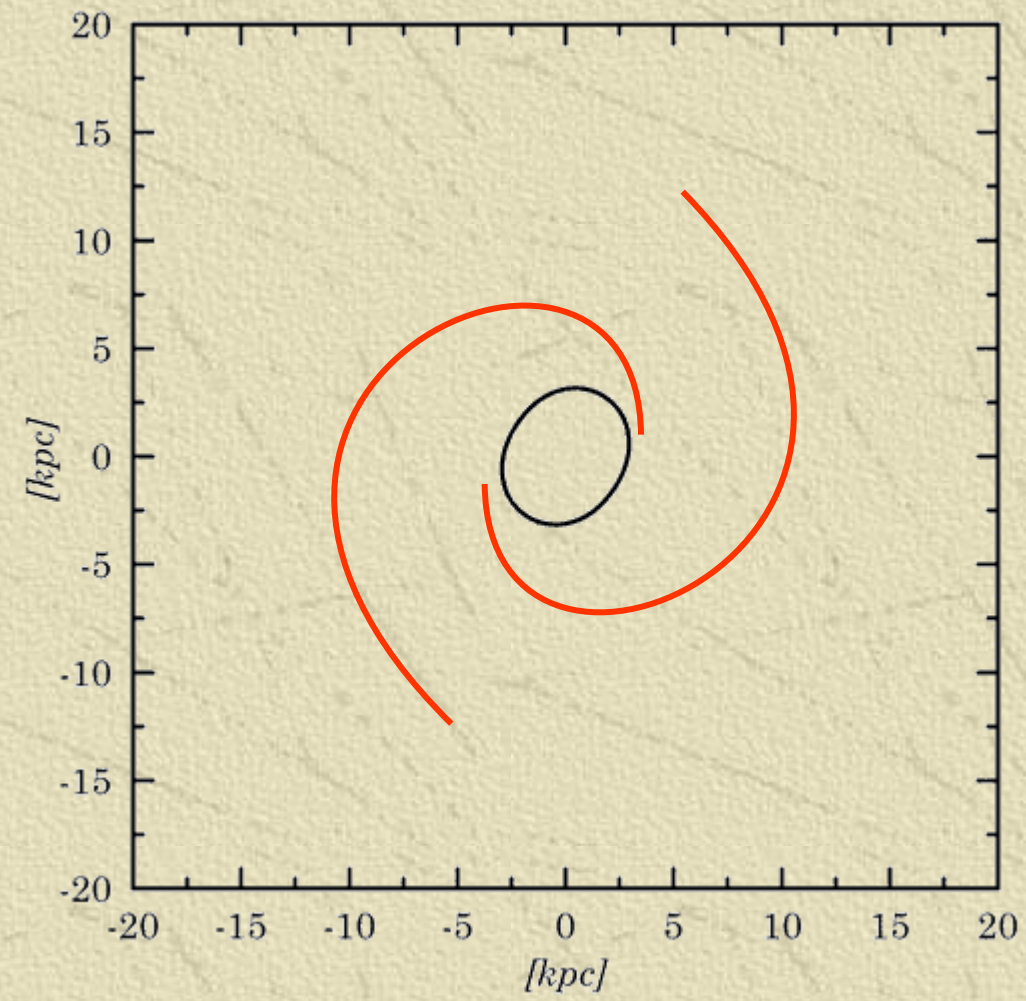
No referencial da galáxia:



$$\kappa^2 = 4\Omega^2\left[1 + \frac{r_0}{2\Omega}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)_{r_0}\right]$$

Órbitas Epicíclicas e Braços Espirais

Braços espirais estáveis surgem do adensamento de órbitas ao se combinar os movimento circulares e epicíclicos, considerando que a orientação da órbita resultante se defasa em função do raio.



Quando:

$$\frac{\Omega}{\kappa} = \text{inteiro}$$

$$\Downarrow$$

padrão espiral estático

Por outro lado:

$$\frac{\Omega}{\kappa} = \text{não inteiro}$$

$$\Downarrow$$

padrão espiral dinâmico

$\Rightarrow \Omega_p$

Equação de Movimento de uma Onda Espiral

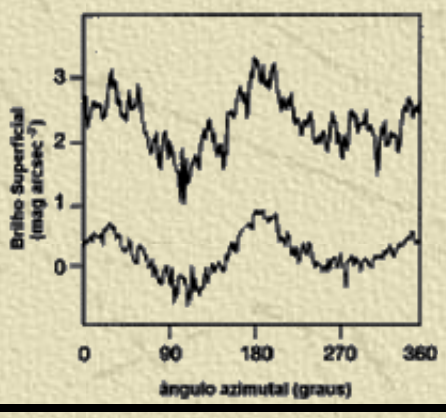
Fazendo uma analogia do material que compõem a galáxia com um fluído, escreve-se a equação de movimento como:

$$\underbrace{\rho \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt}}_{\text{2ª Lei de Newton}} = \overbrace{\nabla P}^{\text{Local}} - \underbrace{\rho \cdot \nabla \varphi_T}_{\text{Global}} \quad \textbf{, onde:} \quad \nabla \varphi_T = \underbrace{\Omega(r)^2 \cdot r \cdot \vec{u}_r}_{\text{Potencial Central}} + \underbrace{\nabla \varphi}_{\text{Perturbação Espiral do Potencial}}$$

supondo:

$$\boxed{\varphi = \Psi \cdot \cos\left(n \cdot \Omega_p t - \theta(r)\right)}$$

Considerando a galáxia espiral descrita por coordenadas polares, as grandezas alteradas por termos de pequenas perturbações serão:



$$\begin{cases} \sigma = \sigma_0 + \sigma_1(r,\theta,t) \\ v_\theta = v_c + V_\theta(r,\theta,t) \\ v_r = 0 + V_r(r,\theta,t) \end{cases}$$

Solução da Equação de Movimento de uma Onda Espiral

Utilizando as equações da continuidade, de Poisson, a pressão em termos da velocidade do som *a* para um fluído adiabático, e linearizando os termos de perturbação, as soluções reais obtidas são:

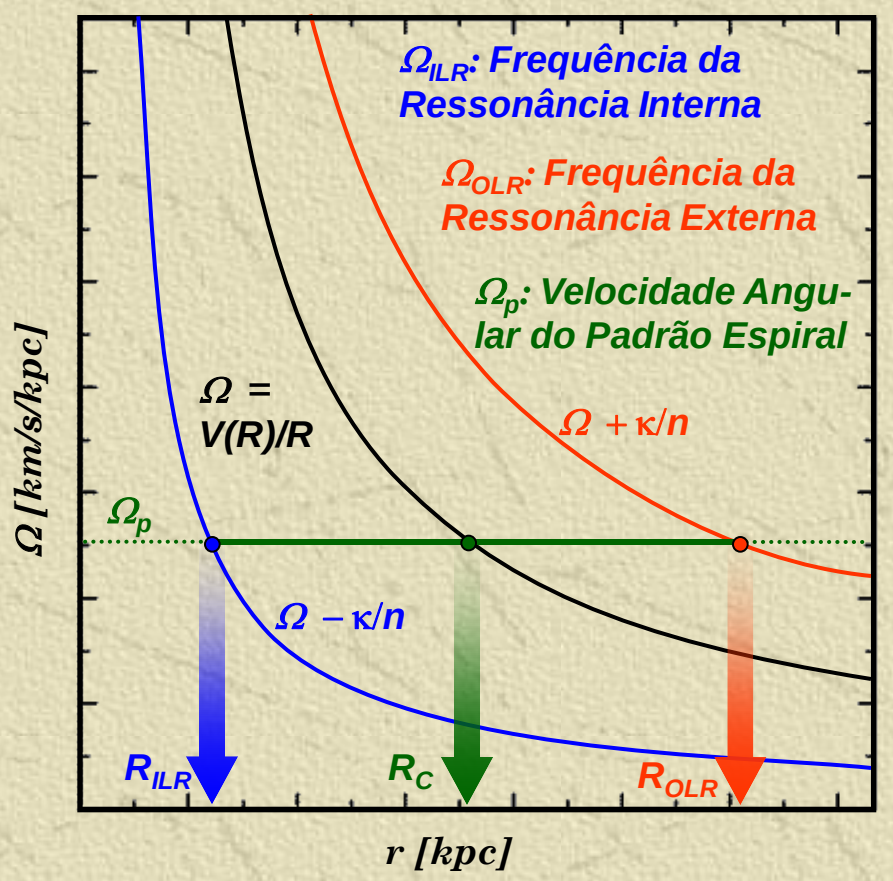
$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{-k^2 \Psi \sigma_0 \cos\left(n\Omega_p t - \theta(r)\right)}{\kappa^2 - n^2\left(\Omega_p - \Omega\right)^2 + k^2 a^2} \\[2ex] V_\theta = \dfrac{k \Psi \kappa^2 \operatorname{sen}\left(n\Omega_p t - \theta(r)\right)}{n\Omega\left(\kappa^2 - n^2\left(\Omega_p - \Omega\right)^2 + k^2 a^2\right)} \\[2ex] V_r = \dfrac{nk\Psi\left(\Omega - \Omega_p\right)\cos\left(n\Omega_p t - \theta(r)\right)}{\kappa^2 - n^2\left(\Omega_p - \Omega\right)^2 + k^2 a^2} \end{cases}$$

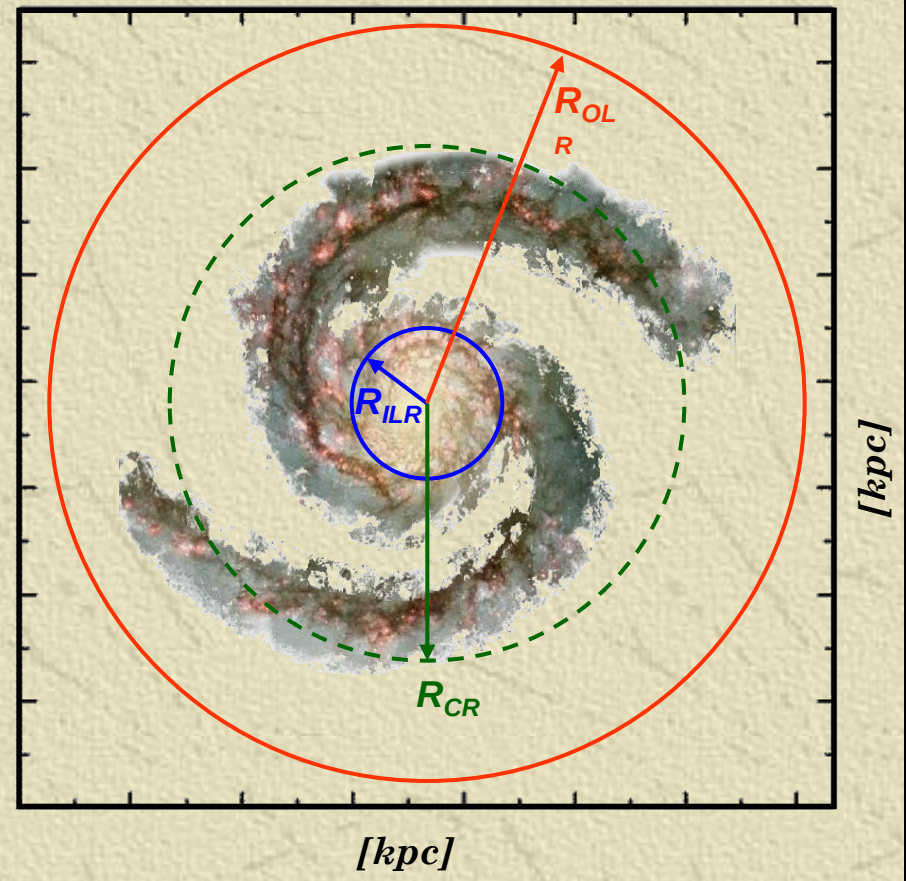
Para um gás de estrelas os termos com *a* desaparecem e é introduzido um fator de correção dado pela relação de dispersão da onda espiral.

As Ressonâncias de Lindblad e a Corrotação

As soluções encontradas são delimitadas entre a ressonância interna (R_{ILR}) e externa (R_{OLR}) de Lindblad, segundo:

$$\Omega - \frac{\kappa}{n} \leq \Omega_p \leq \Omega + \frac{\kappa}{n}$$





O Raio de Corrotação

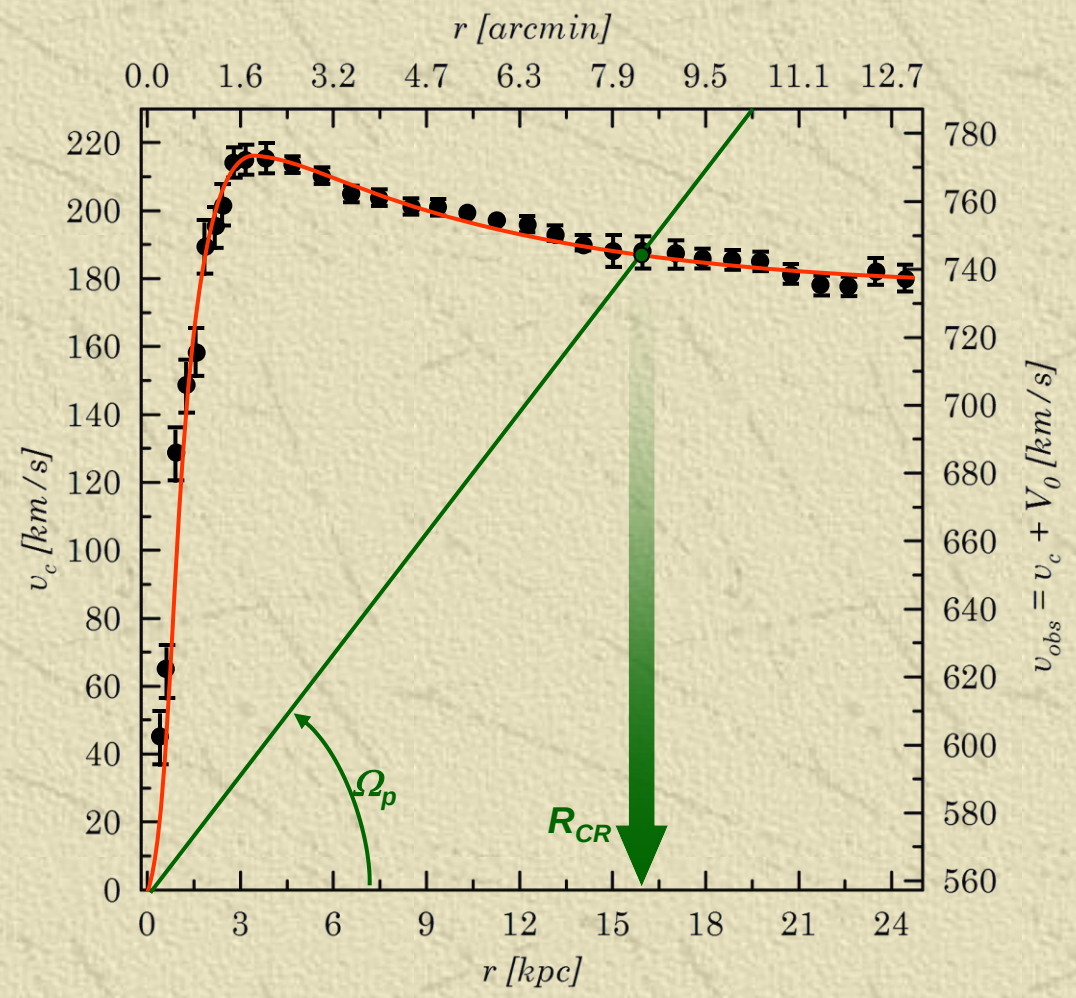
Considerando que entre as ressonâncias de Lindblad o padrão espiral é estável, então, a velocidade de tal padrão é constante em todas extensão da galáxia (curva de rotação de corpo rígido). Assim, onde:

Curva de rotação diferencial do disco galáctico

=

Curva de rotação de corpo rígido do padrão espiral

Raio de Corrotação (R_C)

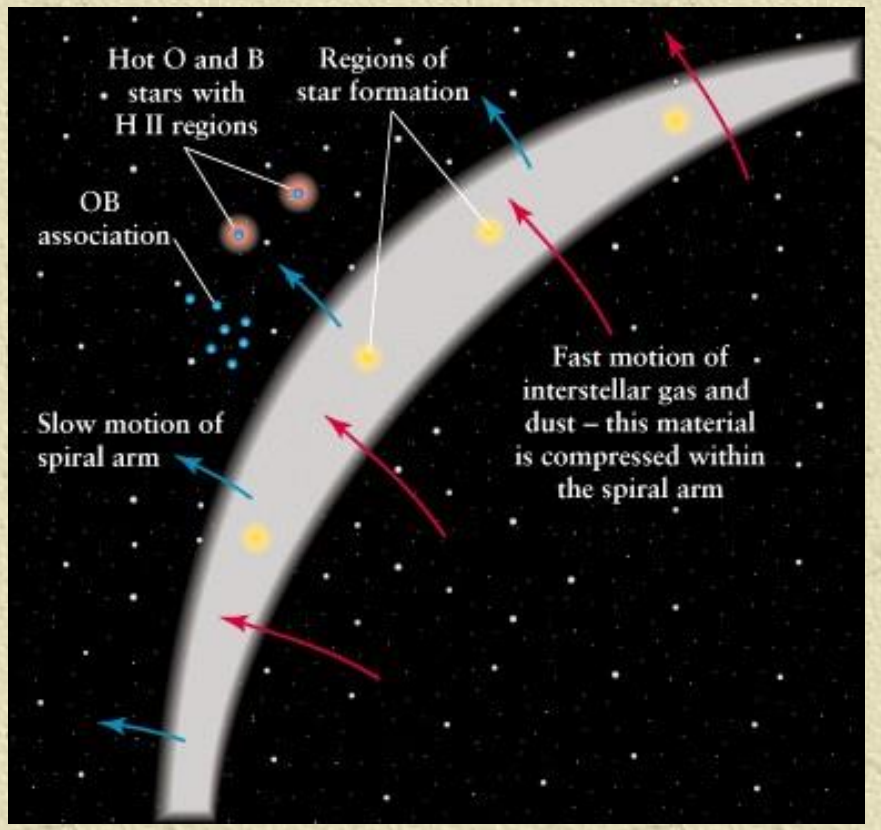


Ondas de Densidade do Padrão Espiral

Os braços espirais são interpretados como ondas de densidade que se deslocam sobre o disco da galáxia. Os braços são as cristas dessas ondas.

As ondas deslocam-se com velocidade inferior à do material em torno do centro da galáxia.

Quando o material apanha um dos braços é comprimido pela onda de densidade o que acaba por proporcionar as condições para a formação de novas estrelas.



As estrelas do tipo O e B têm vidas curtas pelo que praticamente não chegam a abandonar o braço onde nasceram. As estrelas de menor massa acabam por se dispersar por todo o disco (sobre os braços e fora deles).

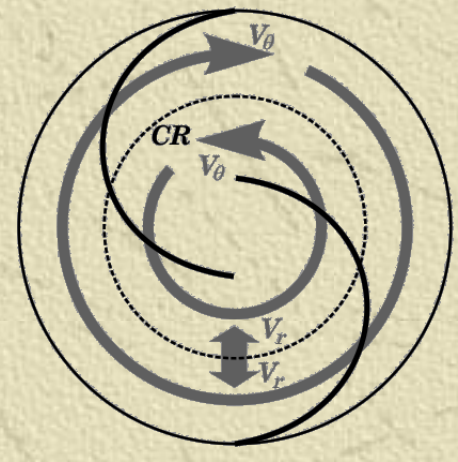
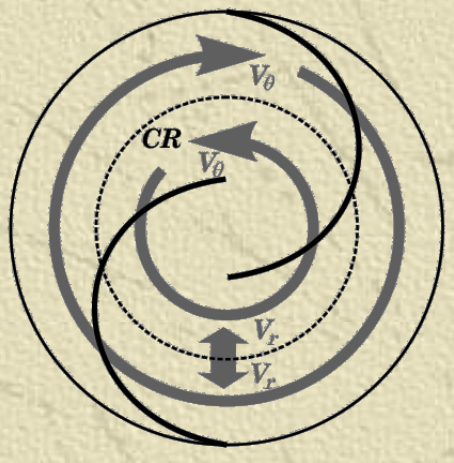
Solução da Equação de Movimento de uma Onda Espiral

Utilizando as equações da continuidade, de Poisson, a pressão em termos da velocidade do som *a* para um fluído adiabático, e linearizando os termos de perturbação, as soluções reais obtidas são:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{-k^2 \Psi \sigma_0 \cos\left(n\Omega_p t - \theta(r)\right)}{\kappa^2 - n^2\left(\Omega_p - \Omega\right)^2 + k^2 a^2} \\[2ex] V_\theta = \dfrac{k \Psi \kappa^2 \operatorname{sen}\left(n\Omega_p t - \theta(r)\right)}{n\Omega\left(\kappa^2 - n^2\left(\Omega_p - \Omega\right)^2 + k^2 a^2\right)} \\[2ex] V_r = \dfrac{nk\Psi\left(\Omega - \Omega_p\right)\cos\left(n\Omega_p t - \theta(r)\right)}{\kappa^2 - n^2\left(\Omega_p - \Omega\right)^2 + k^2 a^2} \end{cases}$$

Região dos Braços		Dentro do Raio de Corrotação $\Omega > \Omega_p$			Fora do Raio de Corrotação $\Omega < \Omega_p$		
Descrição	$n\Omega_p - \phi(r)$	σ_1	V_θ	V_r	σ_1	V_θ	V_r
Máximo	π	> 0	= 0	< 0	> 0	= 0	> 0
Mínimo	0	< 0	= 0	> 0	< 0	= 0	< 0
Lado convexo	$\pi/2$	= 0	> 0	= 0	= 0	< 0	= 0
Lado côncavo	$3\pi/2$	= 0	< 0	= 0	= 0	> 0	= 0

De "Trailing" para Leading



Espiral "Leading" para Trailing